

הסתברות למתמטיקאים

© ארזים

3 במאי 2017

1 תוחלת מותנה

הגדרה 1.1 לכל משתנה מקרי X אינטגרלית ותת סיגמא אלגברה $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ קיים משתנה מקרי $Y := \mathbb{E}(X | \mathcal{G})$ המקיים:

1. Y מדיד לפי $\mathcal{G}$.

2. $\mathbb{E}|Y| < \infty$.

3. לכל $A \in \mathcal{G}$ מתקיים

$$\mathbb{E}(X 1_A) = \mathbb{E}(Y 1_A)$$

כל שני משתנים המקיימים זאת שווים כמעט תמיד, וכל אחד מהם נקרא גרסה של התוחלת המותנה. נסמן

$$\mathbb{E}(X | W) = \mathbb{E}(X | \sigma(W))$$

תרגיל אם תכונה 3 מתקיימת עבור מאורעות A שמהווים מערכת π היוצרת את $\mathcal{G}$ אזי היא מתקיימת לכל $A \in \mathcal{G}$.

תכונות נניח כי X אינטגרלי, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.

1. (תוחלת שלמה) $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{G}))$.

2. אם X מדיד ביחס לאותה $\mathcal{G}$, אזי $\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) = X$ כמעט תמיד.

3. (לינאריות) יהיו X_1, X_2 אינטגרליים, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. אזי

$$\mathbb{E}(a_1 X_1 + a_2 X_2 | \mathcal{G}) = a_1 \mathbb{E}(X_1 | \mathcal{G}) + a_2 \mathbb{E}(X_2 | \mathcal{G})$$

כמעט תמיד.

4. (חיוביות) אם $X \geq 0$ אזי $\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) \geq 0$ כמעט תמיד. בפרט, אם $X_1 \geq X_2$ אינטגרבייליים, אזי $\mathbb{E}(X_1 | \mathcal{G}) \geq \mathbb{E}(X_2 | \mathcal{G})$ כמעט תמיד. **הוכחה:** אם לא מתקיים $\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) \geq 0$ כמעט תמיד, אז קיים n שלם עבורו

$$\mathbb{P}\left(\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) < -\frac{1}{n}\right) > 0$$

זאת כיוון שהמאורע $\{\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) < 0\}$ הוא האיחוד הבא:

$$\bigcup_n \left\{ \mathbb{E}(X | \mathcal{G}) < -\frac{1}{n} \right\}$$

וזהו איחוד עולה. מכאן,

$$\begin{aligned} 0 &> -\frac{1}{n} \mathbb{P}\left(\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) < -\frac{1}{n}\right) > \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) \mathbb{1}_{\{\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) < -\frac{1}{n}\}}\right) = \\ &= \mathbb{E}\left(X \mathbb{1}_{\{\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) < -\frac{1}{n}\}}\right) \geq 0 \end{aligned}$$

■

וקיבלנו סתירה.

5. (התכנסות מונוטונית) אם $0 < X_n \uparrow X$ כמעט תמיד עם $\mathbb{E}|X_n| < \infty$, אזי $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{G}) \uparrow \mathbb{E}(X | \mathcal{G})$ כמעט תמיד. **הוכחה:** $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{G})$ זו סדרה עולה, מהתכונה הקודמת. נגדיר $Y = \limsup \mathbb{E}(X_n | \mathcal{G})$. ברור שגם Y מדיד לפי $\mathcal{G}$, וכן $Y \geq 0$ כמעט תמיד. כעת, לכל $A \in \mathcal{G}$, מהתכנסות מונוטונית רגילה מתקיים

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y \mathbb{1}_A) &= \mathbb{E}(\limsup \mathbb{E}(X_n | \mathcal{G}) \mathbb{1}_A) = \lim \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n | \mathcal{G}) \mathbb{1}_A) = \\ &= \lim \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\lim (X_n) \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_A) \end{aligned}$$

■

על ידי הצבת $A = \Omega$ נקבל את התכונה השנייה בהגדרה, וסיימנו.

6. (פאטו מותנה) אם $X_n \geq 0$ אינטגרבייליים, אזי

$$\mathbb{E}(\liminf (X_n) | \mathcal{G}) \leq \liminf \mathbb{E}(X_n | \mathcal{G})$$

כמעט תמיד.

7. (התכנסות נשלטת מותנה) אם $|X_n| \leq Y$ עם Y אינטגרביילי, $X_n \rightarrow X$ כמעט תמיד. אזי $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{E}(X | \mathcal{G})$ כמעט תמיד.

8. (אי שוויון ינסן מותנה) אם $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ קמורה, עם $\mathbb{E}|C(X)| < \infty$ אזי

$$\mathbb{E}(C(X) | \mathcal{G}) \geq C(\mathbb{E}(X | \mathcal{G}))$$

כמעט תמיד (אפשר לנסח גם עבור $C : I \rightarrow \mathbb{R}$ קמורה, I קטע). **הוכחה:** ניתן למצוא סדרת מספרים a_n, b_n כך שמתקיים

$$C(x) = \sup_n (a_n x + b_n)$$

לכל x . בפרט, לכל n מתקיים $C(x) \geq a_n x + b_n$ ולכן גם

$$\mathbb{E}(C(X) | \mathcal{G}) \geq a_n \mathbb{E}(X | \mathcal{G}) + b_n$$

כמעט תמיד. יש רק כמות בת מניה של ערכי n , ולכן

$$\mathbb{E}(C(X) | \mathcal{G}) \geq \sup_n (a_n \mathbb{E}(X | \mathcal{G}) + b_n)$$

כמעט תמיד. נקבל:

$$\mathbb{E}(C(X) | \mathcal{G}) \geq \sup_n (a_n \mathbb{E}(X | \mathcal{G}) + b_n) = C(\mathbb{E}(X | \mathcal{G}))$$

■

מסקנה 1.2 לכל $p > 1$ מתקיים

$$\|E(X | \mathcal{G})\|_p \leq \|X\|_p$$

9. (נוסחת התוחלת השלמה/תכונת המגדל) נאמר כי $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ סיגמא אלגבראות. אזי

$$\mathbb{E}(X | \mathcal{G} | \mathcal{H}) := \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) | \mathcal{H}) = \mathbb{E}(X | \mathcal{H})$$

כמעט תמיד.

10. (אפשר להוציא מהתוחלת את מה שידוע) נניח כי X אינטגרבילי, וכן Z משתנה מקרי מדיד ביחס לסיגמא אלגברה $\mathcal{G}$. נניח כי ZX אינטגרבילי. אזי

$$\mathbb{E}(ZX | \mathcal{G}) = Z\mathbb{E}(X | \mathcal{G})$$

כמעט תמיד. **הוכחה:** התכונה הראשונה של תוחלת מותנה ברורה. נתחיל לבדוק את השלישית. ראשית נוכיח את הטענה עבור $Z = \mathbb{1}_B$, עבור $B \in \mathcal{G}$. אזי

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_B X | \mathcal{G}) \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B X \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) \mathbb{1}_B \mathbb{1}_A)$$

לכן $\mathbb{1}_B \mathbb{E}(X | \mathcal{G})$ גרסה של $\mathbb{E}(X | \mathcal{G})$. מלינאריות, הטענה נובעת עבור פונקציות פשוטות, ומהתכנסות מונוטונית נקבל לכל משתנה מקרי אי שלילי. שוב מלינאריות, נקבל את הטענה למשתנה כללי. ■

11. (תוחלת מותנה ואי תלות) כאשר X אינטגרבילי, $\mathcal{G}, \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ זוג סיגמא אלגבראות, $\sigma(\sigma(X), \mathcal{G})$ בלתי תלוי באותה $\mathcal{H}$, מתקיים

$$\mathbb{E}(X | \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})) = \mathbb{E}(X | \mathcal{G})$$

כמעט תמיד. מקרה פרטי - אם X בלתי תלוי בסיגמא אלגברה $\mathcal{G}$ אזי $\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$ כמעט תמיד. **הוכחה:** התכונות הראשונה והשנייה של תוחלת מותנה ברורות. יש להראות את השלישית, כלומר עבור $A \in \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ מתקיים

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})) \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) \mathbb{1}_A)$$

מהתרגיל שנתנו קודם, מספיק לקחת $A = B \cap C$, כאשר $B \in \mathcal{G}, C \in \mathcal{H}$, כעת,

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})) \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_B) \mathbb{P}(C)$$

המעבר האחרון נכון בגלל ההנחה שלנו לגבי אי תלות של $\mathcal{H}, \sigma(\sigma(X), \mathcal{G})$, כעת, מהצד השני,

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) \mathbb{1}_B) \mathbb{P}(C) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_B) \mathbb{P}(C)$$

■

וקיבלנו שוויון.

דוגמא נאמר כי X, Y ממשיים, וההתפלגות של X, Y בעלת צפיפות $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$. נרצה להתנות במשתנה X . אז יש עבור Y צפיפות מותנה:

$$f_{Y|X} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$$

המקיימת

$$f_{Y|X}(y | x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy}$$

כעת, עבור $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ עם $h(Y)$ אינטגרבילי מתקיים

$$\mathbb{E}(h(Y) | X) = \int h(Y) f_{Y|X}(y | X) dy$$

גם כאשר אין צפיפויות, אולי נרצה לדבר על התפלגות מותנה, כלומר, לכל ערך של המשתנה המתנה X , נרצה מידת הסתברות חדשה $\mathbb{P}(\cdot | X)$ על מרחב ההסתברות Ω . באופן פומרלי, רוצים פונקציה

$$P : \Omega \times \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$$

עם:

1. לכל $\omega \in \Omega$, שנחשוב עליו בתוך הנקודה שנותנים עבור X , $P(\omega, \cdot)$ היא מידת התסברות על Ω .

2. לכל $A \in \mathcal{F}$, $P(\cdot, A) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A | X)$. לפעמים מסמנים תוחלת של אינדיקטור כהסתברות: $P(\cdot, A) = \mathbb{P}(A | X)$.

דוגמא יהיו X, Y משתנים מקריים בלתי תלויים (לאו דווקא ממשיים): $X : \Omega \rightarrow S, Y : \Omega \rightarrow T$ תהי

$$h : S \times T \rightarrow \mathbb{R}$$

עם $\mathbb{E}|h(X, Y)| < \infty$. נגדיר, תוך שימוש בפוביני, פונקציה $\alpha : S \rightarrow \mathbb{R}$ על ידי

$$\alpha(x) = \mathbb{E}(h(x, Y))$$

אזי מתקים

$$\mathbb{E}(h(X, Y) | X) = \alpha(X)$$

ההוכחה תהיה בתרגיל הבית.

2 מרטינגלים

כעת, נסיף להנחות המקדימות שלנו פילטרציה, כלומר סדרה עולה של סיגמא אלגבראות $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$, כלומר $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1} \subseteq \mathcal{F}$. נחשוב על $\mathcal{F}_n$ בתור המידע שידוע לנו לאחר n צעדים של תהליך.

הגדרה 2.1 מרחב מסונן (filtered space) הוא רביעיה $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_n))$, כאשר $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות, $(\mathcal{F}_n)$ פילטרציה שלו.

הגדרה 2.2 תהליך סטוכסטי הוא סדרת משתנים מקריים $(X_n)_{n=0}^\infty$. התהליך הוא מותאם (adapted) לפילטרציה $(\mathcal{F}_n)$ אם X_n מדיד לפי $\mathcal{F}_n$ לכל n .

הגדרה 2.3 (מרטינגל) תהליך סטוכסטי $(X_n)_{n=0}^\infty$ הוא מרטינגל (ביחס למרחב מסונן מסויים) אם:

1. התהליך (X_n) מותאם לפילטרציה $(\mathcal{F}_n)$.

2. לכל n מתקיים $\mathbb{E}|X_n| < \infty$.

3. לכל $n \geq 1$ מתקיים כמעט תמיד $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$.

אינטואיציה נחשוב על X_n כמייצג את כמות הכסף שיש בידינו לאחר n משחקי הימורים, כאשר ההחלטה כמה להמר בכל משחק עשויה להיות תלויה בתוצאות המשחקים הקודמים. התנאי השלישי מבטיח שהמשחקים הוגנים.

הגדרה 2.4 אם במקום התנאי השלישי נדרוש $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) \geq X_{n-1}$, התהליך נקרא תת-מרטינגל. אם נדרוש $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) \leq X_{n-1}$ נקרא על-מרטינגל.

הערה 2.5 כמה תכונות בסיסיות:

1. תהליך שהוא על-מרטינגל וגם תת-מרטינגל הוא מרטינגל.
2. אם $X_0 \in L^1$, אז (X_n) הוא תת-מרטינגל אם ורק אם $(X_n - X_0)$ תת מרטינגל.
3. אם (X_n) תת-מרטינגל אזי $(-X_n)$ הוא על-מרטינגל.
4. אם (X_n) תת מרטינגל, $n > m \geq 0$, אזי $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_m) \geq X_m$.

דוגמאות ושאלות:

1. סכום של משתנים מקריים בלתי תלויים: יהיו $Z_1, Z_2, \dots$ בלתי תלויים, עם $\mathbb{E}(Z_n) = 0$. נגדיר $X_n = Z_1 + \dots + Z_n, X_0 = 0$. נגדיר $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$. נוכיח שהתהליך (X_n) הוא מרטינגל. יש למעשה להראות רק את התכונה השלישית:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}(Z_1 + \dots + Z_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}\left(\underbrace{Z_1 + \dots + Z_{n-1}}_{\text{measurable}} | \mathcal{F}_{n-1}\right) + \mathbb{E}\left(\underbrace{Z_n}_{\text{independent}} | \mathcal{F}_{n-1}\right) = \\ &= Z_1 + \dots + Z_{n-1} + \mathbb{E}(Z_n) = X_{n-1} \end{aligned}$$

שאלה האם X_n מתכנס כמעט תמיד? לאן?

2. מכפלה של משתנים מקריים בלתי תלויים ואי שליליים: תהי $Z_1, Z_2, \dots$ סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים ואי שליליים. נניח כי $\mathbb{E}(Z_n) = 1$ לכל n . נגדיר $X_n = Z_1 \cdots Z_n, X_0 = 1$. נגדיר $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$. נוכיח שהתהליך (X_n) הוא מרטינגל. שוב יש להראות רק את התכונה האחרונה:

$$\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(Z_1 \cdots Z_n | \mathcal{F}_{n-1}) = Z_1 \cdots Z_{n-1} \mathbb{E}(Z_n | \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$$

שאלה האם X_n מתכנס כמעט תמיד? כן. האם התוחלת של הגבול היא 1? לא תמיד.

3. צבירת מידע: יהי Z משתנה מקרי אינטגרביילי, ותהי $(\mathcal{F}_n)$ פילטרציה. נגדיר $X_n = \mathbb{E}(Z | \mathcal{F}_n)$. אזי (X_n) הוא מרטינגל. כרגיל, שתי התכונות הראשונות ברורות, ועבור השלישית,

$$\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z | \mathcal{F}_n) | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(Z | \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$$

בעתיד נוכיח כי $X_n \rightarrow \mathbb{E}(Z | \mathcal{F}_\infty)$, כאשר $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup \mathcal{F}_n)$. נרצה לשאול האם זה שווה למשתנה Z , כלומר האם Z מדיד ביחס לאותה $\mathcal{F}_\infty$.