

הסתברות למתמטיקאים

© ארזים

29 במרץ 2017

1 אי תלות

במבוא להסתברות אמרנו ששלושה מאורעות הם בלתי תלויים אם

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) &= \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2) \\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_3) \\ \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_2) \mathbb{P}(A_3) \\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2) \mathbb{P}(A_3)\end{aligned}$$

או לחילופין, לכל בחירה של $F_i \in \{A_i, A_i^c\}$, מתקיים

$$\mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = \mathbb{P}(F_1) \mathbb{P}(F_2) \mathbb{P}(F_3)$$

1.1 מושגים עדכניים

יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות.

הגדרה 1.1 נאמר כי $\{G_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{F}$ הן בלתי תלויות אם לכל n ולכל $\{i_k\}_{k=1}^n \subseteq I$ מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n G_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(G_{i_k})$$

לכל בחירה של $\{G_{i_k}\}_{k=1}^n$, כאשר לכל k , מתקיים $G_{i_k} \in \mathcal{G}_{i_k}$.

הערה 1.2 אפשר גם מספר סופי של סיגמא אלגבראות $\{\mathcal{G}_i\}_{i=1}^k \subseteq \mathcal{F}$, למשל על ידי לקיחת שאר הסיגמא אלגבראות טריוויאליות, או על ידי דרישה שיתקיים

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n G_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(G_i)$$

לכל בחירה של $\{G_i\}_{i=1}^k$, כאשר לכל i , מתקיים $G_i \in \mathcal{G}_i$.

מסקנה 1.3 אם $\{G_i\}_{i \in I}$ (אולי כמות סופית) בלתי אלגבראות בלתי תלויות, אזי כל תת קבוצה של סיגמא אלגבראות גם היא בלתי תלויה.

הגדרה 1.4 משתנים מקריים $\{X_i\}_{i \in I}$ הם בלתי תלויים אם $\{\sigma(X_i)\}_{i \in I}$ בלתי תלויים.

הגדרה 1.5 מאורעות $\{E_i\}_{i \in I}$ הם בלתי תלויים אם $\mathbb{1}_{E_1}, \mathbb{1}_{E_2}, \dots$ בלתי תלויים. כלומר, אם הסיגמא אלגבראות $\{\{\emptyset, E_i, E_i^c, \Omega\}\}_{i \in I}$ בלתי תלויות.

כדי לבדוק אי תלות בפועל, נשתמש בלמה הבאה, ובהכללות שלה.

למה 1.6 תהיינה $\mathcal{G}, \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ ותהיינה $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ מערכות פאי המקיימות

$$\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{I})$$

$$\mathcal{H} = \sigma(\mathcal{J})$$

אזי אם $\mathbb{P}(G \cap H) = \mathbb{P}(G)\mathbb{P}(H)$ עבור $G \in \mathcal{I}, H \in \mathcal{J}$ (במצב זה נאמר כי $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ בלתי תלויים), אזי אותה תוצאה מתקיימת לכל $G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}$ (כלומר $\mathcal{H}, \mathcal{G}$ בלתי תלויים).

הוכחה: נקבע $G \in \mathcal{I}$. נגדיר שתי מידות על $\mathcal{H}$:

$$\mu_1(H) = \mathbb{P}(G \cap H)$$

$$\mu_2(H) = \mathbb{P}(G)\mathbb{P}(H)$$

וניתן לבדוק שאלה אכן מידות. הן לא מידות הסתברות:

$$\mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega) = \mathbb{P}(G) < \infty$$

כיוון שהמידות הללו מזדעות על $\mathcal{J}$ לפי התנאים, נובע מלמה קודמת שהן מזדהות על $\sigma(\mathcal{J}) = \mathcal{H}$.

הראינו כי לכל $G \in \mathcal{I}$ ולכל $H \in \mathcal{H}$ מתקיים

$$\mathbb{P}(G \cap H) = \mathbb{P}(G)\mathbb{P}(H)$$

כעת, נקבע $H \in \mathcal{H}$ ונגדיר שתי מידות על $\mathcal{G}$:

$$\mu_3(G) = \mathbb{P}(G \cap H)$$

$$\mu_4(G) = \mathbb{P}(G)\mathbb{P}(H)$$

וניתן לבדוק שאלה אכן מידות. הן לא מידות הסתברות:

$$\mu_3(\Omega) = \mu_4(\Omega) = \mathbb{P}(H) < \infty$$

כיוון שהמידות הללו מזדעות על $\mathcal{I}$ לפי התנאים, נובע מלמה קודמת שהן מזדהות על $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{G}$.

הראינו כי לכל $G \in \mathcal{G}$ ולכל $H \in \mathcal{J}$ מתקיים

$$\mathbb{P}(G \cap H) = \mathbb{P}(G) \mathbb{P}(H)$$

■

בסך הכל הוכחנו את מה שרצינו.

דוגמא שני משתנים מקריים ממשיים X, Y הם בלתי תלויים אם ורק אם לכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x) \mathbb{P}(Y \leq y)$$

כדי לבדוק זאת, מספיק להבחין שלכל משתנה מקרי ממשי X , המאורעות

$$\pi(X) = \{ \{X \leq x\} \mid x \in \mathbb{R} \}$$

הם מערכת פאי שיוצרת את $\sigma(X)$ (כי הן תמונות הפוכות של מערכת פאי שיוצרת את הסיגמא אלגברה של $\mathbb{R}$).

ניתן להכליל את הלמה הקודמת ליותר מזוג מערכות פאי, אבל צריך להוסיף תנאי.

למה 1.7 אם $\{\mathcal{I}_i\}_{i=1}^n$ מערכות פאי, כאשר מתקיים $\Omega \in \mathcal{I}_i$ לכל i , וכן

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \mathcal{I}_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\mathcal{I}_i)$$

לכל בחירה של $\{I_i\}_{i=1}^n$, כאשר לכל i , $I_i \in \mathcal{I}_i$, אזי $\{\sigma(\mathcal{I}_i)\}_{i=1}^n$ בלתי תלויים. בפרט, $\{X_i\}_{i=1}^n$ משתנים מקריים ממשיים הם בלתי תלויים אם ורק אם

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq x_i)$$

לכל בחירה של $\{x_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}$.

למשל, עבור שלושה מאורעות, נוכל לראות שהם בלתי תלויים על ידי לקיחת המאורעות

$$\left\{ \mathbb{1}_{E_i} \geq -\frac{1}{2} \right\} = \Omega, \left\{ \mathbb{1}_{E_i} \geq \frac{1}{2} \right\} = E_i$$

וכדומה.

משפט 1.8 (למת בורל קנטלי השנייה). יהיו $\{E_i\}_i$ סדרת מאורעות בלתי תלויים. אם

$$\sum_i \mathbb{P}(E_i) = \infty$$

אזי

$$\mathbb{P}(\limsup E_i) = 1$$

הוכחה: נחשב:

$$\mathbb{P}(\limsup E_k) = \mathbb{P}\left(\bigcap_n \bigcup_{k \geq n} E_k\right) = \lim_n \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n} E_k\right) = \lim_n \left(1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq n} E_k^c\right)\right)$$

כעת, נשים לב שמאי תלות מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq n} E_k^c\right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^r E_k^c\right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^r \mathbb{P}(E_k^c) = \prod_{k \geq n} \mathbb{P}(E_k^c)$$

נמשיך, אם כן, ונקבל:

$$\mathbb{P}(\limsup E_n) = \lim_n \left(1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq n} E_k^c\right)\right) = \lim_n \left(1 - \prod_{k \geq n} \mathbb{P}(E_k^c)\right)$$

נותר להוכיח:

$$\lim_n \prod_{k \geq n} \mathbb{P}(E_k^c) = 0$$

ואכן:

$$\lim_n \prod_{k \geq n} \mathbb{P}(E_k^c) = \lim_n \prod_{k \geq n} (1 - \mathbb{P}(E_k)) \leq \lim_n \prod_{k \geq n} e^{-\mathbb{P}(E_k)} = \lim_n e^{-\sum_{k \geq n} \mathbb{P}(E_k)} = 0$$

■

דוגמא לכך שהדרישה לאי תלות הכרחית. נטיל מטבע הוגן פעם אחת, ונגדיר את כל המאורעות להיות אותו מאורע E - קיבלנו עץ. סכום ההסתברויות הוא כמובן אינסופי, אבל

$$\limsup E_i = E$$

ולכן קורה בהסתברות $\frac{1}{2}$.

2 סדרת משתנים מקריים ממשיים בלתי תלויים

יש גישה עם משפט ההרחבה של קרתאודורי. אנחנו נעבוד בגישה אחרת.

שלב ראשון נראה שיש מרחב הסתברות, ועליו $X_1, X_2, \dots$ בלתי תלויים, כאשר

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = 0) = \frac{1}{2}$$

נבחר את המרחב להיות $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \text{Leb})$. לכל נקודה $\omega \in [0, 1]$ יש פיתוח בינארי (אם יש שתי אפשרויות, נבחר את האינסופי. באופן מפורש, המשתנים הם

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \mathbb{1}_{\{\omega \geq \frac{1}{2}\}} \\ \omega_2 &= \mathbb{1}_{\{\omega \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{4}, 1]\}} \\ &\vdots\end{aligned}$$

אזי התנאי על ההסתברויות מתקיים. כמו כן, המשתנים בלתי תלויים - די לבדוק לכל n ולכל $b_1, \dots, b_n \in \{0, 1\}$ שמתקיים

$$\mathbb{P}(\omega_1 = b_1, \dots, \omega_n = b_n) = \frac{1}{2^n}$$

שלב שני נניח שנתונה סדרת מידות הסתברות $\mu_1, \mu_2, \dots$ על הישר הממשי. אזי קיים מרחב הסתברות ומשתנים מקריים $X_1, X_2, \dots$ בלתי תלויים כך שלכל i מתקיים $\mathcal{L}(X_i) = \mu_i$. ראשית נתמודד עם המקרה בו כל אחידה על $[0, 1]$. נכתוב את המשתנים הקודמים, במערך דו מימדי:

$$\begin{array}{cccc}\omega_1 & \omega_3 & \omega_4 & \omega_{10} \\ \omega_2 & \omega_5 & \omega_9 & \dots \\ \omega_6 & \omega_8 & \dots & \\ \omega_7 & \dots & & \end{array}$$

וכן הלאה. כעת, נגדיר X_i להיות המשתנה שספרותיו הבינאריות הן המשתנים שבשורה i במערך. נובע שכל X_i אחיד בקטע $[0, 1]$ והם בלתי תלויים. כעת, ראינו בתרגיל הבית שלכל מידת הסתברות μ על $\mathbb{R}$ קיימת $f_\mu : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ מדידה כך שאם U משתנה מקרי אחיד על $[0, 1]$ אזי $\mathcal{L}(f_\mu(U)) = \mu$ כדי לסיים, ניקח $f_{\mu_1}(X_1), f_{\mu_2}(X_2), \dots$. נבחין שלאורך כל הבנייה, מרחב ההסתברות הוא $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \text{Leb})$.

דוגמא לשימוש בבורל קנטלי: אם $X_1, X_2, \dots$ משתנים מקריים בלתי תלויים, שלכל אחד התפלגות $\text{Exp}(1)$, כלומר לכל $x \geq 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X_i > x) = e^{-x}$$

נגדיר

$$L = \limsup_n \frac{X_n}{\log n}$$

אזי

$$\mathbb{P}(L = 1) = 1$$

כי לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\log n} > (1 + \varepsilon)\right) &= \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \\ \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\log n} > (1 - \varepsilon)\right) &= \frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\end{aligned}$$

לכן רק מספר סופי של מאורעות מהסוג הראשון יקרו, מלמת בורל קנטלי הראשונה, אבל מספר אינסופי של מאורעות מהסוג השני יקרו, מלמת בורל קנטלי השנייה.

3 חוק 0-1 של קולמוגורוב

תהי $X_1, X_2, \dots$ סדרת משתנים מקריים. נגדיר

$$\mathcal{T}_n := \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$$

כמו כן, נגדיר את סיגמא אלגברת הזנב:

$$\mathcal{T} = \bigcap_n \mathcal{T}_n$$

משתנה מקרי ממשי Z מדיד ביחס לסיגמא אלגברת הזנב אם ורק אם הוא מדיד ביחס לסיגמא אלגברה $\mathcal{T}_n$, לכל n , כלומר אם ורק אם קיימות פונקציות מדידות $f_1, f_2, \dots$ כך שמתקיים

$$Z = f_n(X_n, X_{n+1}, \dots)$$

דוגמאות למאורעות בתוך $\mathcal{T}$:

$$\begin{aligned}&\left\{ \exists \lim_n X_n \right\} \\ &\left\{ \sum_n X_n < \infty \right\}\end{aligned}$$

משתנה מקרי שמדיד ביחס לסיגמא אלגברת הזנב:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

משפט 3.1 (חוק 0-1 של קולמוגורוב) תהי $X_1, X_2, \dots$ סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים. אזי:

1. לכל $A \in \mathcal{T}$ מתקיים $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.
2. אם Z מדיד ביחס לסיגמא אלגברת הזנב $\mathcal{T}$, אז קיים $c \in [-\infty, \infty]$ כך שמתקיים $\mathbb{P}(Z = c) = 1$.

הוכחה:

1. נרצה להראות שלכל $A, A \in \mathcal{T}$ בלתי תלוי בעצמו, כלומר

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)^2$$

ולכן $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$. נגדיר $\mathcal{G}_n = \sigma(X_1, \dots, X_{n-1})$ אזי $\mathcal{G}_n, \mathcal{T}_n$ בלתי תלויים. מספיק לבדוק למערכות פאי $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ שיוצרות אותן - נבחר

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \{ \{X_1 \leq x_1, \dots, X_{n-1} \leq x_{n-1}\} \mid x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R} \} \\ \mathcal{J} &= \{ \{X_n \leq x_n, \dots, X_{n+k} \leq x_{n+k}\} \mid k \in \mathbb{N}, x_n, \dots, x_{n+k} \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

ועל אלה זה כבר ברור. מכאן, $\mathcal{G}_n, \mathcal{T}$ בלתי תלויים, שכן $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_n$. נובע כי $\mathcal{T}$ בלתי תלוי בכל מאורע בתוך

$$\bigcup_n \mathcal{G}_n$$

וכיוון שזו מערכת פאי (אפילו אלגברה), נובע כי $\mathcal{T}$ בלתי תלוי בסיגמא אלגברה

$$\sigma\left(\bigcup_n \mathcal{G}_n\right)$$

אבל, מתקיים גם

$$\sigma\left(\bigcup_n \mathcal{G}_n\right) = \sigma(X_1, X_2, \dots)$$

שכן שתייהן הסיגמא אלגבראות המינימליות שמכילות כל תמונה הפוכה של קבוצה מדידה בורל תחת כל אחד מהמשתנים X_i . מכאן,

$$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_n \subseteq \sigma(X_1, X_2, \dots) = \sigma\left(\bigcup_k \mathcal{G}_k\right)$$

ולכן נקבל כי $\mathcal{T}$ בלתי תלוייה בעצמה. לכן, כל מאורע בה בלתי תלוי בכל אחד אחר - ובפרט בעצמו.

2. נובע מכך שלכל $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(Z \leq x) \in \{0, 1\}$$

■

דוגמא יהיו $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ משתנים מקריים בלתי תלויים המקיימים

$$\mathbb{P}(\varepsilon_j = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_j = -1) = \frac{1}{2}$$

אזי לכל $\alpha > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\sum_j \varepsilon_j \frac{1}{j^\alpha} < \infty\right) \in \{0, 1\}$$

למעשה,

$$\mathbb{P}\left(\sum_j \varepsilon_j \frac{1}{j^\alpha} < \infty\right) = \begin{cases} 1 & \alpha > \frac{1}{2} \\ 0 & \alpha \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

4 אינטגרציה

ראינו בפונקציות ממשיות. סימון חדש: אם μ מידה, f פונקציה מדידה, A קבוצה מדידה, נסמן

$$\begin{aligned} \mu(f) &= \int f(x) \, d\mu(x) \\ \mu(f; A) &= \mu(f \cdot \mathbb{1}_A) = \int_A f(x) \, d\mu(x) \end{aligned}$$

5 תוחלת

יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות.

הגדרה 5.1 נאמר כי $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ אם

$$\int |X(\omega)|^p d\mu(\omega) < \infty$$

ואז נסמן

$$\|X\|_{L^p} = \left(\int |X(\omega)|^p d\mathbb{P}(\omega) \right)^{\frac{1}{p}}$$

הגדרה 5.2 עבור משתנה מקרי $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, או משתנה מקרי אי שלילי, נגדיר

$$\mathbb{E}(X) = \int X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

למשתנה מקרי אי שלילי $\mathbb{E}(X) = \infty$.

5.1 משפטי התכנסות

תהי $X_1, X_2, \dots$ סדרת משתנים מקריים כך שמתקיים $X_n \rightarrow X$ כמעט תמיד, עבור משתנה מקרי X כלשהו.

משפט 5.3 (התכנסות מונוטונית) אם $X_n \uparrow X$, X_n אי שלילי, אזי $\mathbb{E}(X_n) \uparrow \mathbb{E}(X)$.

משפט 5.4 (התכנסות נשלטת) אם קיים משתנה מקרי $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ כך שמתקיים $|X_n| \leq Y$ כמעט תמיד, אזי $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow \mathbb{E}(X)$.

משפט 5.5 (למת שפה) אם $\mathbb{E}(|X_n|) \rightarrow \mathbb{E}(|X|)$, אזי $\mathbb{E}(|X_n - X|) \rightarrow 0$ (התכנסות במרחב L_1).

משפט 5.6 (התכנסות חסומה) אם קיים $K < \infty$ כך שמתקיים $|X_n| < K$ כמעט תמיד, אזי $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow \mathbb{E}(X)$.

משפט 5.7 (הלמה של פאטו) אם לכל n מתקיים $X_n \geq 0$, אזי

$$\mathbb{E}(X) \leq \liminf_n \mathbb{E}(X_n)$$