

הסתברות למתמטיקאים

© ארזים

22 במרץ 2017

1 מאורעות - המשך

אנחנו תמיד במבנה של $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, כאשר Ω קבוצה, $\mathcal{F}$ סיגמא אלגברה, $\mathbb{P}$ מידת הסתברות.

משפט 1.1 (למת בורל קנטלי הראשונה) יהיו $E_1, E_2, \dots$ מאורעות כך שמתקיים

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i) < \infty$$

אזי

$$\mathbb{P}(E_n \text{ i.o.}) = \mathbb{P}(\limsup E_n) = 0$$

הוכחה:

$$\mathbb{P}(\limsup E_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} E_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n} E_k\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{k \geq n} \mathbb{P}(E_k)}_{\text{tail of a convergent series}} = 0$$

■

2 משתנים מקריים

הגדרה 2.1 יהיו (S, Σ) , $(T, \mathcal{T})$ מרחבים מדידים. אזי $h : S \rightarrow T$ נקראת מידה אם לכל $A \in \mathcal{T}$ מתקיים $h^{-1}(A) \in \Sigma$.

אצלנו, כמעט תמיד, $T \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}$, ואז $\mathcal{T} = \mathcal{B}(T)$. לעתים נאפשר לפונקציות לקבל את הערך $\pm\infty$. נתאר כעת מספר הגדרות ספציפיות עבור $(T, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ (או אולי $(T, \mathcal{T}) = [-\infty, \infty]$).

הגדרה 2.2 אוסף הפונקציות המדידות מהמרחב (S, Σ) למרחב $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ יסומן $m\Sigma$.

הגדרה 2.3 תת הקבוצה של $m\Sigma$ של פונקציות מדידות ואי שליליות תסומן $(m\Sigma)^+$.

הגדרה 2.4 תת הקבוצה של $m\Sigma$ של פונקציות מדידות וחסומות תסומן $b\Sigma$.

הגדרה 2.5 אם S מרחב טופולוגי, וכן $\Sigma = \mathcal{B}(S)$, אזי פונקציה מדידה $h : S \rightarrow T$ תקרא בורל.

2.1 כיצד נבדוק שפונקציה מדידה?

תהי $h : (S, \Sigma) \rightarrow (T, \mathcal{T})$.

טענה 2.6 1. פעולות על קבוצות נשמרות על ידי h^{-1} . בפרט

$$h^{-1}(A^c) = (h^{-1}(A))^c$$

$$h^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} h^{-1}(A_i)$$

2. מסקנה מיידית: אם $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{C})$, אזי אם $h^{-1}(C) \in \Sigma$ לכל $C \in \mathcal{C}$, אזי h מדידה.

3. בפרט, אם $(T, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ מספיק לבדוק כי $h^{-1}((-\infty, x)) \in \Sigma$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

4. אם $(S, \Sigma), (T, \mathcal{T})$ מרחבים טופולוגיים, $\Sigma = \mathcal{B}(S), \mathcal{T} = \mathcal{B}(T)$, אז אם h רציפה, h מדידה.

הוכחה: 1 מוכר ולא קשה, לכן לא נוכיח אותו. נוכיח את 2:
 לפי 1, הקבוצה $\{A \in \mathcal{T} \mid h^{-1}(A) \in \Sigma\}$ היא סיגמא אלגברה, ומכילה את $\mathcal{C}$, ולכן $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{C}) \subseteq \{A \in \mathcal{T} \mid h^{-1}(A) \in \Sigma\}$.
 3 ברור מתוך 2, כי אוסף הקרניים יוצר את הסיגמא אלגברה $\mathcal{B}$.
 עבור 4, נשתמש שוב בסעיף 2. $\mathcal{T}$ נוצרת על ידי אוסף הקבוצות הפתוחות, ולכן מספיק לבדוק כי $h^{-1}(O) \in \Sigma$ לכל $O \subseteq T$ פתוחה. מרציפות h , $h^{-1}(O) \subseteq S$ פתוחה, ולכן $h^{-1}(O) \in \Sigma = \mathcal{B}(S)$. ■

טענה 2.7 אם $h_1 : (S, \Sigma) \rightarrow (T_1, \mathcal{T}_1), h_2 : (T_1, \mathcal{T}_1) \rightarrow (T_2, \mathcal{T}_2)$ מדידות, אזי גם ההרכבה $h_2 \circ h_1 : (S, \Sigma) \rightarrow (T_2, \mathcal{T}_2)$ היא מדידה.

לא נוכיח, אבל ההוכחה קלה מאוד.

2.1.1 מכפלות של מרחבים מדידים

נרצה להגדיר מבנה של מרחב מדיד על $T_1 \times T_2$, כאשר $(T_1, \mathcal{T}_1), (T_2, \mathcal{T}_2)$ מרחבים מדידים. הסיגמא אלגברה תהיה $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$, שאותה נגדיר באופן הבא:

$$\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 = \sigma(\{A_1 \times T_2 \mid A_1 \in \mathcal{T}_1\} \cup \{T_1 \times A_2 \mid A_2 \in \mathcal{T}_2\})$$

אפשר גם יותר גורמים:

$$(T_1, \mathcal{T}_1) \times \cdots \times (T_n, \mathcal{T}_n) = (T_1 \times \cdots \times T_n, \mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_n)$$

כאשר מדובר בסיגמא אלגברה המינימלית שמכילה כל קבוצה מהצורה $T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_n$.
 $A_i \in \mathcal{T}_i$ כאשר $T_{i-1} \times A_i \times T_{i+1} \times \cdots \times T_{n-1} \times T_n$.
 ניתן להגדיר את אותו הדבר גם עבור כמות אינסופית של של גורמים (מעצמה כלשהי).

תרגיל יהיו $((T_i, \mathcal{T}_i))_{i \in I}, (S, \Sigma)$ מרחבים מדידים. אזי פונקציה

$$h : (S, \Sigma) \rightarrow \prod_{i \in I} (T_i, \mathcal{T}_i)$$

היא מדידה אם ורק אם כל קואורדינטה שלה מדידה - כלומר, אם נגדיר לכל קואורדינטה הטלה $p_j(t) = t_j$ אזי h מדידה אם ורק אם לכל $i \in I$ $p_j \circ h : i \in I$ מדידה.
 $(S, \Sigma) \rightarrow (T_i, \mathcal{T}_i)$ מדידה.

הערה 2.8 סיגמא אלגברת המכפלה קטנה מדי אם I גדול מדי מניה. למשל נתון $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ לכל $i \in [0, 1]$ מהי

$$\prod_{i \in [0, 1]} (\mathbb{R}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^{[0, 1]}, \mathcal{B}^{[0, 1]})$$

הנקודות במרחב הן $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, וקבוצה של פונקציות מדידה אם ורק אם היא מערבת (באופן מדיד) רק מספר בן מניה של קואורדינטות. למשל, אוסף הפונקציות הרציפות לא מדיד.

תרגיל הראו כי

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = (\mathcal{B}(\mathbb{R}))^n$$

למה 2.9 תהינה $h_1, h_2 : (S, \Sigma) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ מדידות. אזי $h_1 + h_2, h_1 \cdot h_2$ ועוד הרבה אחרות הן מדידות.

הוכחה: נגדיר $h : (S, \Sigma) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2)$ על ידי $h(s) = (h_1(s), h_2(s))$. זו מדידה, מהתרגיל הראשון. נגדיר גם את

$$a : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$$

על ידי

$$a(x, y) = x + y$$

זו פונקציה רציפה, ולכן בפרט מדידה. כעת, $h_1 + h_2$ היא ההרכבה $a \circ h$, ולכן מדידה. ■
 כך מוכיחים כל דבר דומה.

גם גבולות של סדרות פונקציות מדידות הם מדידים.

למה 2.10 תהי סדרת פונקציות מתוך $m\Sigma$, כלומר $h_n : (S, \Sigma) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ מדידה לכל n . אזי גם $\inf h_n(s)$, $\sup h_n(s)$ מדידות, וכך גם $\liminf h_n$, $\limsup h_n$. כמו כן, הקבוצה

$$\left\{ s \in S \mid \exists \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(s) \right\}$$

הוכחה: נתחיל עם $\inf h_n$. די להראות שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$(\inf h_n)^{-1}((-\infty, x)) \in \Sigma$$

נשים לב כי

$$\begin{aligned} (\inf h_n)^{-1}((-\infty, x)) &= \left\{ s \in S \mid \inf_n h_n(s) < x \right\} = \left\{ s \in S \mid \exists n \ h_n(s) < x \right\} = \\ &= \bigcup_n h_n^{-1}((-\infty, x)) \in \Sigma \end{aligned}$$

באופן דומה נקבל מדידות של $\sup h_n$. כעת נראה עבור $\liminf h_n$. נבחים כי

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} h_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\inf_{k \geq n} h_n(s)}_{\text{increasing}} = \sup_n \inf_{k \geq n} h_n(s)$$

כעת נקבל מדידות מהמדידות של $\inf, \sup$. באופן דומה מקבלים מדידות של $\limsup$. כדי לבדוק מדידות של הקבוצה עליה הגבול קיים, נבחין כי

$$\{s \in S \mid \exists \lim h_n(s)\} = \{s \in S \mid \limsup h_n(s) - \liminf h_n(s) = 0\} = (\limsup h_n - \liminf h_n)^{-1}(0) \in \Sigma$$

■

2.2 משתנים מקריים

כעת, יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות.

הגדרה 2.11 פונקציה מדידה $h : \Omega \rightarrow T$ נקראת משתנה מקרי שמקבל ערכים במרחב T (ואם לא נציין אם T , ולא יהיה ברור אחרת, אזי $(T, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$).

דוגמא אינסוף הטלות מטבע. $\Omega = \{h, t\}^{\mathbb{N}}$, והסיגמא אלגברה הנוצרת על ידי $\{h, t\} \times \dots$. לא נדון עדיין במידה $\mathbb{P}$. כעת נגדיר

$$X_n : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$$

על ידי

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega_n = t \\ 0 & \omega_n = h \end{cases}$$

האם

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \frac{2}{3} \right\}$$

הוא מאורע? התשובה היא כן. לכל n , $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ הוא משתנה מקרי, ולכן גם

$$L^+ = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

$$L^- = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

הם משתנים מקריים והמאורע הנתון הוא

$$\left\{ L^+ = \frac{2}{3} \right\} \cap \left\{ L^- = \frac{2}{3} \right\}$$

2.2.1 סיגמא אלגברה שנוצרת ממשתנים מקריים

יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות. יהיו $\{Y_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ משתנים מקריים.

הגדרה 2.12 נסמן בתור $\sigma(\{Y_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma})$ את הסיגמא אלגברה הנוצרת על ידי כל התמונות ההפוכות דרך Y_γ . נאמר כי $Y_\gamma : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (T_\gamma, \mathcal{T}_\gamma)$ אזי $\sigma(\{Y_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma})$ נוצרת על ידי $Y_\gamma^{-1}(A)$ כאשר $A \in \mathcal{T}_\gamma, \gamma \in \Gamma$.

דוגמא בהקשר של הדוגמא הקודמת, מהי $\sigma(X_1, X_2)$? מתקיים

$$\sigma(X_1, X_2) = \{A \times B \times \{h, t\} \times \dots \mid A, B \subseteq \{h, t\}\}$$

בנוסף

$$\mathcal{F} = \sigma(X_1, X_2, \dots)$$

הערה 2.13 אם $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ משתנים מקריים, אזי

$$\sigma((Y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sigma\left(\bigcup_k \sigma(Y_1, \dots, Y_k)\right)$$

2.3 אינטואיציה

נחשוב על ניסוי כהגרלת $\omega \in \Omega$ מפולג לפי המידה $\mathbb{P}$. אם $A \in \mathcal{F}$ עבורו $\omega \in A$ "קרה", וכל $A \in \mathcal{F}$ עבורו $\omega \notin A$ "לא קרה". בתוך $\sigma\left((Y_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}\right)$ נמצא "המידע" לגבי המשתנים Y_γ במובן הבא: אם יתגלה לנו הערך $Y_\gamma(\omega)$ לכל $\gamma \in \Gamma$, אוכל לדעת לגבי כל מאורע $A \in \sigma\left((Y_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}\right)$ אם הוא קרה או לא.

משפט 2.14 אם $Y : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (T, \mathcal{T})$ מדיד, $h : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ מדידה ביחס לסיגמא אלגברה $\sigma(Y)$, אזי קיימת $f : (T, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ מדידה כך שמתקיים $h = f \circ \gamma$ (וגם להיפך, $f \circ \gamma$ מדידה ביחס לסיגמא אלגברה $\sigma(Y)$).

לא נוכיח כאן את המשפט.

2.4 התפלגות של משתנה מקרי

יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות, ויהי X משתנה מקרי (ממשי).

הגדרה 2.15 ההתפלגות של X , $\mathcal{L}(X)$, היא מידת ההסתברות על $\mathbb{R}$ שמוגדרת על ידי

$$\mathcal{L}(X)(A) = \mathbb{P}(X \in A)$$

לכל $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

נאמר למשל כי $X \sim \text{Ber}\left(\frac{2}{3}\right)$ אם $\mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(X=1) = \frac{2}{3}$. במילים אחרות, המידה $\mathcal{L}(X)$ תמוכה על $\{0, 1\}$, ונותנת משקל $\frac{2}{3}$ עבור 1, $\frac{1}{3}$ עבור 0.

הגדרה 2.16 פונקציית ההתפלגות המצטברת של X היא $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ המוגדרת על ידי

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

זו דרך לתאר את $\mathcal{L}(X)$, כי שתי התפלגויות $\mathcal{L}(X)$, $\mathcal{L}(Y)$ הן זהות אם ורק אם $F_X = F_Y$.

טענה 2.17 יהי X משתנה מקרי.

1. $F_X(x) \leq F_X(y)$ אזי $x \leq y$ כלומר, לא יורדת, כלומר אם $x \leq y$ אזי $F_X(x) \leq F_X(y)$.

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$$

3. F_X רציפה מימין, כלומר לכל x מתקיים

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} F_X(x + \varepsilon) = F_X(x)$$

הוכחה:

1. ברור.

2. למשל נראה כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\underbrace{X \leq n}_{\text{increasing}} \right) = \mathbb{P} \left(\bigcup_n \{X \leq n\} \right) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$$

לפי 1 זה מספיק.

3. יהי $x \in \mathbb{R}$ אזי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_X \left(x + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\underbrace{X \leq x + \frac{1}{n}}_{\text{decreasing}} \right) = \mathbb{P} \left(\bigcap_n \left\{ X \leq x + \frac{1}{n} \right\} \right) = \mathbb{P}(X \leq x) = F_X(x)$$

■

טענה 2.18 כל $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ עם התכונות מהטענה הקודמת היא פונקציית התפלגות מצטברת של משתנה מקרה. בפירוט נוסף, קיים

$$X : ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \text{Leb}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F = F_X \text{ כד שמתקיים}$$

טענה זו תוכח בתרגיל ובתרגול (בניית סקורוחוד).

2.5 משפט המחלקה המונוטונית

משפט 2.19 תהי H קבוצה של פונקציות חסומות מקבוצה S אל $\mathbb{R}$ שמקיימות:

1. H מרחב לינארי (סגור לסכום וכפל בסקלר).

2. הפונקציה הקבועה 1 נמצאת בתוך H .

3. אם סדרת פונקציות אי שליליות מתוך H , כך שמתקיים $f_n \uparrow f$ כאשר f חסום, אזי $f \in H$.

אזי אם H מכיל את 1_A לכל $A \in I$, כאשר I היא מערכת פאי, אזי H מכיל כל פונקציה חסומה ומדידה ביחס לסיגמא אלגברה $\sigma(I)$.

3 אי תלות

נתחיל כעת, ונמשיך בשיעור הבא. כאן לראשונה אנחנו יוצאים מהתחום שנגענו בו בפונקציות ממשיות.

הגדרה 3.1 סיגמא אלגבראות $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots \subseteq \mathcal{F}$ הן בלתי תלויות אם לכל $i_1, \dots, i_n$ ולכל מתקיים $A_{i_1} \in \mathcal{G}_{i_1}, \dots, A_{i_n} \in \mathcal{G}_{i_n}$

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{j=1}^n A_{i_j} \right) = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}(A_{i_j})$$

הגדרה 3.2 משתנים מקריים $X_1, X_2, \dots$ הם בלתי תלויים אם $\sigma(X_1), \sigma(X_2), \dots$ הן בלתי תלויות.

הגדרה 3.3 מאורעות $E_1, E_2, \dots$ הם בלתי תלויים אם האינדקטורים שלהם בלתי תלויים.