

# הסתברות למתמטיקאים

© ארזים

28 ביוני 2017

## 1 משפט הגבול המרכזי

נחזור על סוף ההוכחה מהשיעור שעבר. ניזכר בכמה למות מחדו"א:

**למה 1.1** לכל  $x$  מתקיים  $1+x \leq e^x$ , ולכל  $|x| \leq \frac{1}{2}$  מתקיים  $1+x \geq e^{x-2x^2}$ . מכאן, נסיק כי  $1+x = e^{x-O(x^2)}$  כאשר  $x \rightarrow 0$  (זה למעשה חלש יותר מהלמה).

ניזכר במה שדיברנו עליו בשיעור שעבר. יהי  $X$  משתנה מקרי בעל תוחלת 0 ושונות 1. אזי

$$\varphi_X(\theta) = \mathbb{E}(e^{i\theta X}) = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + o(\theta^2)$$

כאשר  $\theta \rightarrow 0$ . נבחר כעת את סוף הוכחת משפט הגבול המרכזי. תהי  $(X_n)$  סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים ושויי התפלגות בעלי תוחלת 0 ושונות 1. אזי

$$\overline{S}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

קיבענו  $\theta \in \mathbb{R}$  וכתבנו

$$\varphi_{\overline{S}_n}(\theta) = \mathbb{E}(e^{i\theta \overline{S}_n}) = \varphi_{X_1}\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\theta^2}{n} + o\left(\frac{\theta^2}{n}\right)\right)^n$$

נפעיל את המסקנה עבור  $x = -\frac{1}{2}\frac{\theta^2}{n} + o\left(\frac{\theta^2}{n}\right)$  ונקבל

$$\begin{aligned}\varphi_{\overline{S}_n}(\theta) &= \left(e^{-\frac{1}{2}\frac{\theta^2}{n} + o\left(\frac{\theta^2}{n}\right) + O\left(\frac{\theta^4}{n^2}\right)}\right)^n = \left(e^{-\frac{1}{2}\frac{\theta^2}{n} + o\left(\frac{\theta^2}{n}\right)}\right)^n = \\ &= e^{-\frac{1}{2}\theta^2 + o(\theta^2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{2}\theta^2}\end{aligned}$$

והמשפט נובע כעת ממשפט ההתכנסות של לוי.

**דוגמא** כמות המעגלים בתמורה אחידה על  $n$  איברים. ניקח  $\pi \in S_n$  אחידה, ונסמן  $C(\pi)$  את כמות המעגלים בתוך  $\pi$ . ראינו בקורס כי  $C(\pi) = \sum X_j$ , כאשר  $X_j \sim \text{Ber}\left(\frac{1}{j}\right)$ . נובע  $\mathbb{E}(C(\pi)) = \log n + O(1)$ ,  $\text{Var}(C(\pi)) = \log n + O(1)$ . נוכיח כעת שמתקיים

$$\overline{C} := \frac{C(\pi) - \log n}{\sqrt{\log n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

הוכחה: נקבע  $\theta \in \mathbb{R}$  ונעריך את  $\varphi_{\overline{C}}(\theta)$ :

$$\begin{aligned}\varphi_{\overline{C}}(\theta) &= \mathbb{E} \left( e^{i \frac{C(\pi) - \log n}{\sqrt{\log n}} \theta} \right) = \\ &= e^{-i\theta \sqrt{\log n}} \mathbb{E} \left( e^{i \frac{\theta}{\sqrt{\log n}} (X_1 + \dots + X_n)} \right) = \\ &= e^{-i\theta \sqrt{\log n}} \prod_{j=1}^n \mathbb{E} \left( e^{i \frac{\theta}{\sqrt{\log n}} X_j} \right) = \\ &= e^{-i\theta \sqrt{\log n}} \prod_{j=1}^n \left( \left( 1 - \frac{1}{j} \right) 1 + \frac{1}{j} e^{i \frac{\theta}{\sqrt{\log n}}} \right)\end{aligned}$$

ונרצה לדעת אם זה מתכנס אל  $e^{-\frac{1}{2}\theta^2}$ . נבחין כי

$$\begin{aligned}1 - \frac{1}{j} + \frac{1}{j} e^{i \frac{\theta}{\sqrt{\log n}}} &= 1 + \frac{1}{j} \left( e^{i \frac{\theta}{\sqrt{\log n}}} - 1 \right) = \\ &= 1 + \frac{1}{j} \left( \frac{i\theta}{\sqrt{\log n}} - \frac{\theta^2}{2 \log n} + o\left(\frac{\theta^2}{\log n}\right) \right) = \\ &= e^{\frac{1}{j} \left( \frac{i\theta}{\sqrt{\log n}} - \frac{\theta^2}{2 \log n} + o\left(\frac{1}{\log n}\right) \right) + O\left(\frac{1}{j^2 \log n}\right)}\end{aligned}$$

נציב זאת בחזרה ונקבל

$$\varphi_{\overline{C}}(\theta) = e^{-i\theta \sqrt{\log n} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \left( \frac{i\theta}{\sqrt{\log n}} - \frac{\theta^2}{2 \log n} + o\left(\frac{1}{\log n}\right) + O\left(\frac{1}{j^2 \log n}\right) \right)}$$

נבחין כי

$$\begin{aligned}\left( \frac{i\theta}{\sqrt{\log n}} - \frac{\theta^2}{2 \log n} \right) \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} &= \left( \frac{i\theta}{\sqrt{\log n}} - \frac{\theta^2}{2 \log n} \right) (\log n + O(1)) = \\ &= i\theta \sqrt{\log n} - \frac{\theta^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right)\end{aligned}$$

ולכן

$$\varphi_{\overline{C}}(\theta) = e^{-\frac{\theta^2}{2} + \sum_{j=1}^n o\left(\frac{1}{j \log n}\right) + O\left(\frac{1}{j^2 \log n}\right)} = e^{-\frac{\theta^2}{2} + o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{\theta^2}{2}}$$

■

## 1.1 חובות ישנים

**משפט 1.2** (משפט ההיפוך של לוי) תהי  $\mu$  מידת הסתברות על  $\mathbb{R}$  ותהי  $\varphi(\theta) = \int e^{i\theta x} d\mu(x)$  הפונקציה האופיינית שלה. אזי לכל  $a < b$  מתקיים

$$\frac{1}{2}\mu(\{a\}) + \mu((a, b)) + \frac{1}{2}\mu(\{b\}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-i\theta a} - e^{-i\theta b}}{i\theta} \varphi(\theta) d\theta$$

יתר על כן, אם  $\int |\varphi(\theta)| d\theta < \infty$  אזי  $\mu$  רציפה בהחלט ביחס למידת לבג, ואם נסמן את הצפיפות שלה  $f$ , אזי  $f$  רציפה וכן

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ix\theta} \varphi(\theta) d\theta$$

אפשר מכאן לשחזר את  $\mu$ , כי למשל לכל  $a < b$  יתקיים

$$\mu([a, b]) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \mu(\{a - \varepsilon\}) + \mu((a - \varepsilon, b + \varepsilon)) + \frac{1}{2} \mu(\{b - \varepsilon\})$$

**הוכחה:** נתחיל בנוסחה הראשונה. נבחין ראשית שלכל  $u, v \in \mathbb{R}$  מתקיים

$$|e^{iv} - e^{iu}| \leq |v - u|$$

נציב את הגדרת  $\varphi(\theta)$  בנוסחה ונסה להשתמש במשפט פוביני.

$$\int_{-T}^T \frac{e^{-i\theta a} - e^{-i\theta b}}{i\theta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} d\mu(x) d\theta = \int_{-T}^T \int \frac{e^{i\theta(x-a)} - e^{i\theta(x-b)}}{i\theta} d\mu(x) d\theta$$

נבדוק אינטגרליות:

$$\int_{-T}^T \int \frac{|e^{i\theta(x-a)} - e^{i\theta(x-b)}|}{|\theta|} d\mu(x) d\theta \leq \int_{-T}^T \int b - a d\mu(x) d\theta = 2T(b - a) < \infty$$

כאשר באמצע השתמשנו באי השוויון שתיארנו קודם. לכן, נפעיל את פוביני, ונקבל שהנוסחה ממשיכה ונהיית

$$\int_{-T}^T \int \frac{e^{i\theta(x-a)} - e^{i\theta(x-b)}}{i\theta} d\mu(x) d\theta = \int \int_{-T}^T \frac{e^{i\theta(x-a)} - e^{i\theta(x-b)}}{i\theta} d\theta d\mu(x)$$

נתמקד באינטגרל הפנימי.

$$\int_{-T}^T \frac{\cos(\theta(x-a)) + i \sin(\theta(x-a)) - \cos(\theta(x-b)) - i \sin(\theta(x-b))}{i\theta} d\theta$$

נוכל לבטל את הגורמים מהצורה  $\frac{\cos(\theta(x-a))}{\theta}, \frac{\cos(\theta(x-b))}{\theta}$ , שהם אי זוגיים, ולכן זה ממשיך ונהיה

$$\int_{-T}^T \frac{\sin(\theta(x-a))}{\theta} - \int_{-T}^T \frac{\sin(\theta(x-b))}{\theta} d\theta$$

נגדיר כעת

$$S(U) = \int_0^U \frac{\sin t}{t} dt$$

עבור  $U > 0$ . כעת נוכל לכתוב את האינטגרלים הקודמים בעזרת  $S$ . אכן,

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T \frac{\sin(\theta(x-a))}{\theta} d\theta &= 2 \int_0^T \frac{\sin(\theta(x-a))}{\theta} d\theta = [\theta(x-a) = t] \\ &= \frac{2}{x-a} \int_0^{T(x-a)} \frac{\sin(t)}{t} (x-a) dt = 2 \int_0^{T(x-a)} \frac{\sin t}{t} dt \end{aligned}$$

אם  $x = a$  תהיה כאן בעיה אבל נקבל באינטגרל המקורי 0. אם  $x < a$  נצטרך להפוך את הסימן: האינטגרל שלנו הוא

$$\int_{-T}^T \frac{\sin(\theta(x-a))}{\theta} d\theta = 2 \operatorname{sign}(x-a) S(T|x-a|)$$

בסך הכל האינטגרל שלנו (החיצוני) הוא

$$2 \int (\operatorname{sign}(x-a) S(T|x-a|) - \operatorname{sign}(x-b) S(T|x-b|)) d\mu(x)$$

נעיר כעת, כתרגיל, שמתקיים

$$\lim_{U \rightarrow \infty} S(U) = \frac{\pi}{2}$$

אולי נחזור לזה מאוחר יותר (רמז - אינטגרציה במרוכבים). אם כן,

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-i\theta a} - e^{-i\theta b}}{i\theta} \varphi(\theta) d\theta &= \dots = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int (\operatorname{sign}(x-a) S(T|x-a|) - \operatorname{sign}(x-b) S(T|x-b|)) d\mu(x) \end{aligned}$$

בגלל שהאינטגרל של  $S(U)$  מתכנס בגבול, נוכל להפעיל התכנסות חסומה, ולחליף סדר של גבול ואינטגרל. נמשיך:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int (\operatorname{sign}(x-a) S(T|x-a|) - \operatorname{sign}(x-b) S(T|x-b|)) d\mu(x) &= \\ = \frac{1}{\pi} \int \lim_{T \rightarrow \infty} (\operatorname{sign}(x-a) S(T|x-a|) - \operatorname{sign}(x-b) S(T|x-b|)) d\mu(x) &= \\ = \frac{1}{2} \int \operatorname{sign}(x-a) - \operatorname{sign}(x-b) d\mu(x) \end{aligned}$$

יש קעת שלושה מקרים:

$$1. x \notin [a, b]$$

$$2. x \in \{a, b\}$$

$$3. x \in (a, b)$$

במקרה הראשון, הסימנים יהיו שווים, וההפרש יהיה 0. במקרה השני, ההפרש הוא 1. במקרה 3, ההפרש יהיה 2. בסך הכל זה שווה

$$\frac{1}{2} \mu(\{a\}) + \mu((a, b)) + \frac{1}{2} \mu(\{b\})$$

נעבור להראות את הנוסחה השנייה. נניח כי

$$\int |\varphi(\theta)| d\theta < \infty$$

אזי

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-i\theta a} - e^{-i\theta b}}{i\theta} \varphi(\theta) d\theta = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{-i\theta a} - e^{-i\theta b}}{i\theta} \varphi(\theta) \mathbb{1}_{\theta \in [-T, T]} d\theta$$

מהתכנסות נשלטת (את הגורם הראשון חסמנו קודם, השני הנחנו שחסון והשלישי אינדיקטור) נחליף גבול ואינטגרל:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\theta a} - e^{-i\theta b}}{i\theta} \varphi(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \mu(a) + \mu((a, b)) + \frac{1}{2} \mu(b)$$

נוכיח שהאינטגרל מגדיר פונקציה רציפה של  $a, b$ , ולכן לא יכולים להיות אטומים של  $\mu$ . הרציפות הזו נובעת מהתכנסות נשלטת. נראה כי  $\mu$  רציפה בהחלט:

$$\frac{\mu([a, b])}{b-a} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{-i\theta a} - e^{-i\theta b}}{i\theta(b-a)} \varphi(\theta) d\theta$$

מהתכנסות נשלטת, נוכל לקחת גבול  $b \rightarrow a$  בתוך האינטגרל, ואז

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{\mu([a, b])}{b - a} = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ia\theta} \varphi(\theta) d\theta =: f(a)$$

נותר לבדוק שזו אכן הצפיפות.  $f$  רציפה, מהתכנסות נשלטת. כדי לראות שהיא צפיפות של  $\mu$  נבחין כי

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \frac{1}{2\pi} \int e^{-ix\theta} \varphi(\theta) d\theta dx = \frac{1}{2\pi} \int \int_a^b e^{-ix\theta} dx \cdot \varphi(\theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{-i\theta a} - e^{-i\theta b}}{i\theta} \varphi(\theta) d\theta = \mu([a, b]) \end{aligned}$$

■

ולכן סיימנו.

נותר לנו עוד חוב אחד:

**משפט 1.3** (משפט ההתכנסות של לוי) תהי  $(\mu_n)$  סדרת מידות הסתברות על הישר, עם פונקציות אופייניות  $\varphi_{\mu_n}(\theta)$ . נניח כי  $\varphi_{\mu_n}(\theta) \rightarrow g(\theta)$  לכל  $\theta \in \mathbb{R}$ . נניח עוד כי  $g$  רציפה בנקודה  $\theta = 0$ . אזי קיימת מידת הסתברות  $\mu$  על הישר עם  $\mu_n \xrightarrow{d} \mu$  וכן  $g(\theta) = \varphi_\mu(\theta)$ .  
**הוכחה:** ניזכר בהגדרת של הדיקות של סדרת מידות - לכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $K < \infty$  כך שמתקיים

$$\mu_n([-K, K]) \geq 1 - \varepsilon$$

לכל  $n$ . במקרה שזה קורה, יש מידת הסתברות  $\mu$  ותת סדרה  $\mu_{n_k}$  עם  $\mu_{n_k} \xrightarrow{d} \mu$ . ראשית, נניח כי  $\mu_n$  (מהמשפט) הדוקה. ניקח תת סדרה  $\mu_{n_k} \xrightarrow{d} \mu$  עבור  $\mu$  מידת הסתברות. מההגדרה נקבל

$$\varphi_{\mu_{n_k}}(\theta) = \int e^{ix\theta} d\mu_{n_k}(x) \rightarrow \int e^{ix\theta} d\mu(x) = \varphi_\mu(\theta)$$

שכן  $e^{ix\theta}$  רציפה וחסומה. מכאן נקבל  $g = \varphi_\mu$ . נניח בשלילה כי  $\mu_n \not\xrightarrow{d} \mu$ , כלומר קיימת פונקציה רציפה וחסומה  $h(x)$  עם

$$\int h(x) d\mu_n(x) \not\rightarrow \int h(x) d\mu(x)$$

לכן, קיימת תת סדרה  $(m_k)$  עבורה

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int h(x) d\mu_{m_k}(x)$$

קיים ושווה מאשר  $\int h(x) d\mu(x)$ . מהדיקות יש תת סדרה  $\mu_{n_{k_l}} \rightarrow \nu$  ולכן

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int h(x) d\mu_{n_{k_l}}(x) = \int h(x) d\nu(x)$$

ובפרט  $\mu \neq \nu$ . אבל כמו קודם,  $g = \varphi_\nu$ , וראינו כבר  $g = \varphi_\mu$ , ולכן  $\varphi_\mu = \varphi_\nu$ , וממשפט ההיפוך של לוי נקבל  $\mu = \nu$ , בסתירה.

כעת נותר לנו להראות כי  $\mu_n$  הדוקה - ולשם כך נצטרך את הנתון כי  $g$  רציפה בנקודה  $\theta = 0$ . נבחין כי

$$g(0) = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\mu_n}(0) \\ g(\theta) \leq 1$$

נקבע  $\varepsilon > 0$ . אזי קיים  $\delta > 0$  כך שאם  $|\theta| \leq \delta$  אזי  $|g(\theta) - 1| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ . נבחין גם כי

$$\varphi_{\mu_n}(\theta) + \varphi_{\mu_n}(-\theta) = 2 \int \cos(x\theta) d\mu_n(x) \in \mathbb{R}$$

לכן

$$\frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} 2 - g(\theta) - g(-\theta) d\theta \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

מהתכנסות חסומה, קיים  $N_0$  כך שלכל  $n > N_0$  מתקיים

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geq \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} 2 - \varphi_{\mu_n}(\theta) - \varphi_{\mu_n}(-\theta) d\theta = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} 2 - \int e^{i\theta x} + e^{-i\theta x} d\mu_n(x) d\theta = \\ &= \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \int (2 - 2\cos(\theta x)) d\theta d\mu_n(x) = \frac{1}{2\delta} \int 4\delta - \frac{4}{x} \sin(x\delta) d\mu_n(x) = \\ &= 2 \int 1 - \frac{\sin(x\delta)}{x\delta} d\mu_n(x) \geq 2 \int 1 - \frac{1}{|x|\delta} d\mu_n(x) \geq \mu_n \left( \left\{ x \mid |x| \geq \frac{2}{\delta} \right\} \right) \end{aligned}$$

■

וזאת לכל  $n$ . לכן  $\mu_n$  אכן הדוקה.