

הסתברות למתמטיקאים

© ארזים

7 ביוני 2017

1 אינטגרליות במידה שווה

אבחנה יהי X משתנה מקרי מתוך L^1 . אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיים K עבורו

$$\mathbb{E}(|X| \mathbb{1}_{|X|>K}) < \varepsilon$$

הוכחה: נשים לב שמתקיים

$$\lim_{K \rightarrow \infty} |X| \mathbb{1}_{|X|>K} = 0$$

כמעט תמיד. מהתכנסות נשלטת (מספיק מונוטונית) נקבל

$$\mathbb{E}(|X| \mathbb{1}_{|X|>K}) \rightarrow 0$$

■

ולכן נסיים.

הגדרה 1.1 אוסף $\mathcal{C}$ של משתנים מקריים נקרא אינטגרלי במידה שווה אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים K כך שמתקיים

$$\sup_{X \in \mathcal{C}} \mathbb{E}(|X| \mathbb{1}_{|X|>K})$$

לא-דוגמה ניקח

$$X_n \sim \begin{cases} n & \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{n-1}{n} \end{cases}$$

אזי $\mathbb{E}|X_n| = 1$ לכל n , כלומר הם חסומים בנורמת L^1 , אבל לכל K מתקיים

$$\mathbb{E}(|X_{K+1}| \mathbb{1}_{|X_{K+1}|>K}) = \mathbb{E}|X_{K+1}| = 1$$

לכן המשתנים הללו לא אינטגרליים במידה שווה. כמו כן, $X_n \rightarrow 0$ כמעט תמיד אבל $\mathbb{E}(X_n) \not\rightarrow 0$.

תכונה אם $\mathcal{C}$ אוסף של משתנים מקריים אינטגרביים במידה שווה אזי $\mathcal{C}$ חסום בנורמת L^1 : יהי $\varepsilon = 1$ וניקח K מתאים. כעת לכל $X \in \mathcal{C}$ מתקיים

$$\mathbb{E}|X| = \mathbb{E}(|X| \mathbb{1}_{|X|>K}) + \mathbb{E}(|X| \mathbb{1}_{|X|\leq K}) \leq 1 + K$$

1.1 תנאים מספיקים לאינטגרביליות במידה שווה

1. אם קיים Y אינטגרבילי עם $|X| \leq Y$ לכל $X \in \mathcal{C}$, אזי $\mathcal{C}$ אינטגרבילי במידה שווה. **הוכחה:** יהי $\varepsilon > 0$. יהי K עבורו $\mathbb{E}(Y \mathbb{1}_{Y>K}) < \varepsilon$. אזי

$$\mathbb{E}(|X| \mathbb{1}_{|X|>K}) \leq \mathbb{E}(Y \mathbb{1}_{|X|>K}) \leq \mathbb{E}(Y \mathbb{1}_{Y>K}) < \varepsilon$$

■

וזאת לכל $X \in \mathcal{C}$.

2. אם קיים $p > 1$ שמקיים

$$\sup_{X \in \mathcal{C}} \mathbb{E}(|X|^p) < \infty$$

כלומר $\mathcal{C}$ חסום בנורמת L^p , אזי $\mathcal{C}$ אינטגרבילי במידה שווה. **הוכחה:** יהי $X \in \mathcal{C}$. אזי

$$\mathbb{E}(|X| \mathbb{1}_{|X|>K}) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|^p \mathbb{1}_{|X|>K})}{K^{p-1}} \leq \frac{\mathbb{E}(|X|^p)}{K^{p-1}} \leq \frac{\sup_{X \in \mathcal{C}} \mathbb{E}(|X|^p)}{K^{p-1}} < \varepsilon$$

■

עבור K גדול מספיק, וסיימו.

כדי לראות טענות מורכבות יותר, נזדקק ללמה הבאה.

למה 1.2 יהי X משתנה מקרי אינטגרבילי. אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם F מאורע עם $\mathbb{P}(F) < \delta$, אזי $\mathbb{E}(|X| \mathbb{1}_F) < \varepsilon$.

הוכחה: נניח בשלילה שקיים $\varepsilon > 0$ ואוסף מאורעות (F_n) כך שמתקיים $\mathbb{P}(F_n) \leq \frac{1}{n^2}$, אבל $\mathbb{E}(|X| \mathbb{1}_{F_n}) > \varepsilon$ נגדיר

$$F = \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n$$

ואז מלמת בורל קנטלי הראשונה נקבל $\mathbb{P}(F) = 0$. כעת, מלמת פאטו (ההפוכה) נקבל

$$0 = \mathbb{E}(|X| \mathbb{1}_F) = \mathbb{E}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} |X| \mathbb{1}_{F_n}\right) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X| \mathbb{1}_{F_n}) > \varepsilon$$

■

בסתירה.

דוגמא מרכזית. יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. יהי X משתנה מקרי אינטגרבילי. נגדיר

$$\mathcal{C} = \{\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) \mid \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \text{ is a sigma algebra}\}$$

אזי $\mathcal{C}$ אינטגרבילי במידה שווה.

הוכחה: תהי $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ תת סיגמא אלגברה. אזי

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|\mathbb{E}(X | \mathcal{G})| \mathbb{1}_{|\mathbb{E}(X | \mathcal{G})| > K}) &\leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(|X| | \mathcal{G}) \mathbb{1}_{|\mathbb{E}(X | \mathcal{G})| > K}) = \\ &= \mathbb{E}(|X| \mathbb{1}_{|\mathbb{E}(X | \mathcal{G})| > K}) < \varepsilon \end{aligned}$$

המעבר שמשומן 1 נובע מאי שוויון ינסן המותנה. המעברים האלה יהיו מוצדקים אם נראה שלכל δ קיים K עבורו לכל $\mathcal{G}$ מתקיים $\mathbb{P}(|\mathbb{E}(X | \mathcal{G})| > K) < \delta$. אכן,

$$\mathbb{P}(|\mathbb{E}(X | \mathcal{G})| > K) \leq \frac{\mathbb{E}(|\mathbb{E}(X | \mathcal{G})|)}{K} \leq \frac{\mathbb{E}(\mathbb{E}(|X| | \mathcal{G}))}{K} = \frac{\mathbb{E}(|X|)}{K}$$

■

ומכאן נסיים.

משפט 1.3 תהי (X_n) סדרה מתוך L^1 , ויהי X משתנה מקרי מתוך L^1 . אזי $X_n \rightarrow X$ בנורמת L^1 אם ורק אם $X_n \rightarrow X$ בהסתברות וגם (X_n) אינטגרבילית במידה שווה.

הוכחה: נניח ראשית את צד שמאל. נגדיר פונקציית קיטום רציפה, $\varphi_K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ על ידי

$$\varphi_K(x) = \begin{cases} K & x \geq K \\ x & x \in [-K, K] \\ -K & x \leq -K \end{cases}$$

נבחין שמתקיים

$$\mathbb{E}|X_n - X| \leq \mathbb{E}|X_n - \varphi_K(X_n)| + \mathbb{E}|\varphi_K(X_n) - \varphi_K(X)| + \mathbb{E}|\varphi_K(X) - X|$$

נטפל ראשית בגורם האמצעי. כיוון שמתקיים $|\varphi_K(x) - \varphi_K(y)| \leq |x - y|$, נובע שמתקיים

$$\varphi_K(X_n) \rightarrow \varphi_K(X)$$

בהסתברות. לכן, ממשפט ההתכנסות החסומה, נקבל שלכל K מתקיים

$$\mathbb{E}|\varphi_K(X_n) - \varphi_K(X)| \rightarrow 0$$

עבור הגורמים האחרים, מתקיים

$$\mathbb{E}|X_n - \varphi_K(X_n)| \leq \mathbb{E}(|X_n| \mathbb{1}_{|X_n| > K})$$

אפשר לבחור K גדול מספיק עבורו גורם זה קטן מאשר ε לכל n , מאינטגרליות במידה שווה. אותו נימוק מתייחס גם לגורם השלישי, ולכן סיימנו את הכיוון הזה. בכיוון השני, ראשית נראה התכנסות בהסתברות. מאי שוויון מרקוב:

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}|X_n - X|}{\varepsilon} \rightarrow 0$$

בשביל אינטגרליות במידה שווה, נבחין כי

$$\mathbb{E}(|X_n| \mathbb{1}_{|X_n| > K}) \leq \mathbb{E}(|X_n| \mathbb{1}_{|X_n| > K}) + \mathbb{E}(|X_n - X|)$$

הגורם הימני שואף לאפס, ולכן נותר רק להוכיח שהגורם השמאלי קטן. נעריך את הסתברות המאורע $|X_n| > K$. מאי שוויון מרקוב ואי שוויון המשולש נקבל

$$\mathbb{P}(|X_n| > K) \leq \frac{\mathbb{E}|X_n|}{K} \leq \frac{\mathbb{E}|X| + \mathbb{E}|X - X_n|}{K} \leq \frac{\mathbb{E}|X| + \sup_n \mathbb{E}|X_n - X|}{K}$$

קיבלנו שלכל $\varepsilon > 0$ קיים K וקיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים

$$\mathbb{E}(|X_n| \mathbb{1}_{|X_n| > K}) < 2\varepsilon$$

לכל אחד מאותם $1 \leq n < N$ קיים K_n משלו כך שמתקיים

$$\mathbb{E}(|X_n| \mathbb{1}_{|X_n| > K_n}) < \varepsilon$$

ואז כדי לסיים ניקח

$$K' = \max\left(K, (K_n)_{n=1}^N\right)$$

■

1.2 מרטינגלים אינטגרליים במידה שווה

נזכר שמרטינגל M שחסום בנורמת L^1 מתכנס כמעט תמיד, אבל לא בהכרח מתכנס בנורמת L^1 . נראה כעת שהתכנסות בנורמת L^1 שקולה לאינטגרליות במידה שווה. יהי $M = (M_n)$ מרטינגל אינטגרלי במידה שווה. אזי M חסום בנורמת L^1 , ולכן מתכנס כמעט תמיד. מהמשפט שראינו לפני רגע, נובע שמתקיים גם $M_n \rightarrow M_\infty$ בנורמת L^1 . במקרה של מרטינגל אינטגרלי במידה שווה, ניתן לחשוב שהגדרנו $(M_n)_{n=0,1,2,\dots,\infty}$. תכונות המרטינגל הן:

1. M_n מדיד ביחס לסיגמא אלגברה $\mathcal{F}_n$.

2. M_n אינטגרלי.

3. לכל $n \geq k$ מתקיים $\mathbb{E}(M_n | \mathcal{F}_k) = M_k$.

נראה שתכונות אלה מתקיימות עבור M_∞ . כרגיל, מגדירים $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup \mathcal{F}_n)$. כעת, M_∞ מדיד לפי $\mathcal{F}_\infty$, וכמובן אינטגרבילי. נבדוק שלכל n מתקיים $\mathbb{E}(M_\infty | \mathcal{F}_n) = M_n$ כמעט תמיד. נרצה להראות שלכל מאורע $F \in \mathcal{F}_n$ מתקיים

$$\mathbb{E}(M_\infty \mathbb{1}_F) = \mathbb{E}(M_n \mathbb{1}_F)$$

ידוע לנו מתכונת המרטינגל שלכל $r \geq n$ מתקיים

$$\mathbb{E}(M_\infty \mathbb{1}_F) \leftarrow \mathbb{E}(M_r \mathbb{1}_F) = \mathbb{E}(M_n \mathbb{1}_F)$$

ולכן סיימנו. באופן דומה, ניתן להראות הוכיח שלתת מרטינגל M אינטגרבילי במידה שווה יש M_∞ ומתקיים $M_n \rightarrow M_\infty$ כמעט תמיד ובנורמת L_1 , וכן

$$\mathbb{E}(M_\infty | \mathcal{F}_n) \geq M_n$$

לכל n כמעט תמיד.

משפט 1.4 (ההתכנסות העולה של לוי) יהי X משתנה מקרי אינטגרבילי. תהי $(\mathcal{F}_n)$ פילטרציה. נגדיר מרטינגל (M_n) על ידי

$$M_n = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$$

ונזכר בהגדרה

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_n \mathcal{F}_n\right)$$

אזי $M_n \rightarrow \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_\infty)$ כמעט תמיד ובנורמת L^1 .

הוכחה: נבחין כי M אינטגרבילי במידה שווה, מהדוגמה המרכזית בחלק הקודם. לכן קיים $M_\infty = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_\infty)$ עם $M_n \rightarrow M_\infty$ כמעט תמיד ובנורמת L^1 . נותר להראות $M_\infty = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_\infty)$ כמעט תמיד, כלומר יש להראות שלכל $F \in \mathcal{F}_\infty$ מתקיים

$$\mathbb{E}(M_\infty \mathbb{1}_F) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_F)$$

מספיק להראות זאת עבור X אי שלילי, וכמו כן מספיק להראות זאת רק עבור $F \in \bigcup \mathcal{F}_n$, כיוון שזו מערכת π שיוצרת את $\mathcal{F}_\infty$ (אפשר לנמק את זה על ידי הגדרת שתי מידות שמזדהות על המערכת, ולכן גם על כל $\mathcal{F}_\infty$). יהי $F \in \mathcal{F}_n$, ואכן, ממה שראינו קודם,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_\infty \mathbb{1}_F) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_\infty \mathbb{1}_F | \mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_F \cdot \mathbb{E}(M_\infty | \mathcal{F}_n)) = \\ &= \mathbb{E}(M_n \mathbb{1}_F) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n) \mathbb{1}_F) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_F) \end{aligned}$$

■

מסקנה 1.5 (חוק 0-1 של קולמוגורוב) תהי סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים. אזי לכל $A \in \mathcal{T}$ (סיגמא אלגברת הזנב) מתקיים $P(A) \in \{0, 1\}$.

הוכחה: נגדיר פילטרציה $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. נבחר $A \in \mathcal{T}$ ונשתמש במשפט ההתכנסות העולה עבור $\mathbb{1}_A$. נגדיר $M_n = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A | \mathcal{F}_n)$, ומהמשפט העולה נקבל

$$M_n \rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{1}_A | \mathcal{F}_\infty) = \mathbb{1}_A$$

כמעט תמיד ובנורמת L^1 . $A \in \mathcal{T}$ ולכן בפרט A מדיד לפי $\sigma(X_{n+1}, \dots, X_{n+2})$, ולכן בלתי תלוי בסיגמא אלגברה $\mathcal{F}_n$. מכאן נקבל

$$M_n = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$$

קיבלנו כי $\mathbb{P}(A) = M_n \rightarrow \mathbb{1}_A$ כמעט תמיד. לכן נקבל $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ בהכרח. ■

משפט 1.6 (ההתכנסות היורדת של לוי) תהי $(\mathcal{G}_n)_{n=0}^\infty$ סדרת סיגמא אלגבראות, כאשר $\mathcal{G}_{-(n+1)} \subseteq \mathcal{G}_{-n}$. נגדיר $\mathcal{G}_{-\infty} = \bigcap \mathcal{G}_{-n}$. יהי X משתנה מקרי אינטגרבי. נגדיר

$$M_{-n} = \mathbb{E}(X | \mathcal{G}_{-n})$$

אזי קיים משתנה מקרי $M_{-\infty}$ עם $M_{-n} \rightarrow M_{-\infty}$ כמעט תמיד ובנורמת L^1 , וכן $M_{-\infty} = \mathbb{E}(X | \mathcal{G}_{-\infty})$.

הוכחה: אותו נימוק שראינו במשפט התכנסות המרטינגלים באמצעות כמות החציות מראה שגם כאן קיים $M_{-\infty}$ כך שמתקיים $M_{-n} \rightarrow M_{-\infty}$ כמעט תמיד. מכאן נוכל לטעון בדיוק באותה צורה כמו במשפט ההתכנסות העולה. ■

מסקנה 1.7 (החוק החזק של המספרים הגדולים) תהי סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים, שווי התפלגות ואינטגרביים. נסמן $S_n = X_1 + \dots + X_n$. אזי $\frac{S_n}{n} \rightarrow \mathbb{E}X_1$ כמעט תמיד (ואפילו בנורמת L^1).

הוכחה: נפעיל את המשפט היורד עבור המשתנה המקרי $X = X_1$. נגדיר $\mathcal{G}_{-n} = \sigma(S_n, S_{n+1}, \dots)$. תרגיל למחשבה נותן

$$\mathbb{E}(X_1 | \mathcal{G}_{-n}) = \frac{S_n}{n}$$

כמעט תמיד, מסימטריה. מהמשפט היורד של לוי קיים $M_{-\infty}$ עם שעבורו $\frac{S_n}{n} \rightarrow M_{-\infty}$ כמעט תמיד ובנורמת L^1 . מתקיים בהכרח

$$\mathbb{E}(M_{-\infty}) = \mathbb{E}(X_1)$$

מחוק 0-1 של קולמוגורוב הגבול של $\frac{S_n}{n}$ הוא משתנה מקרי קבוע כי הוא מדיד ביחס לסיגמא אלגברת הזנב. ■