

אנליזה נומרית 1

© ארזים

27 באפריל 2017

סיימנו במשפט:

משפט 0.1

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

הוכחה: נחשב:

$$\|Ax\|_2^2 = (Ax)^T (Ax) = x^T A^T A x = \langle x, A^T A x \rangle$$

נמשיך:

$$\frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} = \frac{\langle x, A^T A x \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

נסמן $B = A^T A$. סימטרית ומוגדרת חיובית, ולכן יש לה n ערכים ממשיים λ_i עם ווקטורים עצמיים אורתונורמליים v_i . נציג את x בבסיס הווקטורים העצמיים בתור

$$x = \sum \alpha_i v_i$$

ואז

$$Bx = \sum \alpha_i \lambda_i v_i$$

אזי

$$\begin{aligned} \langle x, Bx \rangle &= \left\langle \sum \alpha_i v_i, \sum \alpha_i \lambda_i v_i \right\rangle = \sum \lambda_i \alpha_i^2 \\ \langle x, x \rangle &= \left\langle \sum \alpha_i v_i, \sum \alpha_i v_i \right\rangle = \sum \alpha_i^2 \end{aligned}$$

לכן המנה היא

$$\frac{\sum \lambda_i \alpha_i^2}{\sum \alpha_i^2} \leq \lambda_n = \rho(B)$$

לכן קיבלנו כי

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{\rho(B)}$$

מצד שני, עבור $x = v_n$ נקבל שהמנה הזו היא בדיוק λ_n , ולכן זהו המקסימום, כלומר

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(B)}$$

■

1 ניתוח שגיאות בפתרון מערכת משוואות

נתונה המערכת $Ax = b$. בפועל פותרים

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$$

נרצה לדעת איך השינוי הזה משפיע על הפתרון.

1.1 שגיאות בווקטור b

נסמן x את הפתרון האמיתי, $\tilde{x}$ את המקורב. נגדיר

$$r = \tilde{b} - b = A\tilde{x} - b$$

אזי

$$A\tilde{x} - Ax = \tilde{b} - b = r$$

$$\tilde{x} - x = A^{-1}r$$

$$\|\tilde{x} - x\| = \|A^{-1}r\| \leq \|A^{-1}\| \|r\|$$

קיבלנו

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|r\|} \leq \|A^{-1}\|$$

זוהי רגישות של x לשינוי מוחלט בווקטור b . הרגישות המוחלטת חסומה. נחסום את הטעות היחסית:

$$\frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$$

נכפול את מה שקיבלנו:

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

הגדרה 1.1 מספר התנאי (condition number) של מטריצה A מוגדר על ידי

$$\text{Cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

והוא תלוי בנורמה בה משתמשים.

למה 1.2 לכל נורמה מושרית מתקיים $\text{Cond}(A) \geq 1$.

הוכחה: לכל נורמה מושרית מתקיים

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

(תרגיל). לכן

$$1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \|A^{-1}\|$$

■

דוגמה ניקח $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$. הפתרון הוא $(1, 1)$. נשתמש בנורמת ∞ . מתקיים

$$\|A^{-1}\|_{\infty} = \frac{1}{\varepsilon}, \|A\| = 1$$

$$\|x\|_{\infty} = 1, \|b\|_{\infty} = 1$$

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_{\infty}}{\|r\|_{\infty}} \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

ואז

$$\frac{\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|}}{\frac{\|r\|}{\|b\|}} \leq \text{Cond}(1, \infty) = \frac{1}{\varepsilon}$$

בניס שינוי באגף ימין של מערכת המשוואות: $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 \\ \varepsilon + \alpha_2 \end{pmatrix}$ ונקבל

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 \\ 1 + \frac{\alpha_2}{\varepsilon} \end{pmatrix}$$