

אנליזה נומרית 1

© ארזים

23 באפריל 2017

1 פירוק LU

ראינו שהמצב בו $a_{k,k}^{(k)}$ קטן עשוי להיות בעייתי. ראינו דוגמאות, שבאחת מהן קיבלנו פתרון נכון ובשנייה לא. הזכרנו שתי גישות לפתרון הבעיה, שכעת נפרט אותן.

1. שיטת Full Pivoting - בשלב k מוצאים $i_0, m_0 \geq k$ עבורם

$$|a_{i_0, m_0}^{(k)}| = \max_{i, m \geq k} |a_{i, m}^{(k)}|$$

מחליפים את השורה k עם השורה i_0 ואת העמודה k עם העמודה m_0 , וממשיכים. העלות היא מציאת מקסימום של $(n-k)^2$ מספרים, ובסך הכל על פני כל האיטרציות, העלות היא $O(n^3)$, שזה כמו כל האלגוריתם - יקר.

2. שיטת Partial Pivoting - מחליפים רק שורות. בשלב k מוצאים i_0 עבורו

$$|a_{i_0, k}^{(k)}| = \max_{i \geq k} |a_{i, k}^{(k)}|$$

ואז מחליפים את השורה k עם השורה i_0 . העלות היא מציאת מקסימום של $n-k$ מספרים בכל איטרציה, ובסך הכל $O(n^2)$.

ננסה את השיטה השנייה על הדוגמה הבעייתית:

$$10^{-6}x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

נחליף שורות:

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$10^{-6}x_1 + x_2 = 1$$

כעת נקבל

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$x_2 = 1$$

ומכאן נקבל גם $x_1 = 1$.

הערה 1.1 כאשר פותרים מערכת משוואות עם Full Pivoting, החלפת עמודות $l \leftrightarrow k$ צריכה להיות מלווה בהחלפת משתנים $x_l \leftrightarrow x_k$.

הערה 1.2 אם משתמשים בשיטת Partial Pivoting אז המטריצות L, U מקיימות $LU = PA$, כאשר P היא מטריצת פרמוטציה המתארת את החלפת השורות.

מטריצת פרמוטציה היא מטריצה שמתקבלת מהפעלת החלפות שורה על מטריצת היחידה.

סיכום של האלגוריתם: רוצים לפתור את $Ax = b$. מפרקים $LU = PA$ ואז

$$Ax = b$$

$$PAx = Pb$$

$$LUx = Pb$$

וחישוב Pb לוקח n פעולות.

יש מקרים מיוחדים, בהם פירוק LU לוקח פחות מאשר $\frac{2}{3}n^3$:

1. מטריצה סימטרית מוגדרת חיובית. במקרה זה יש מטריצה משולשית תחתונה L המקיימת $A = LL^T$, וזה נקרא פירוק קולסקי. אפשר לבצע אותו מהר פי שניים מאשר פירוק LU רגיל.

2. מטריצה תלת אלכסונית - יש ערכים שאינם 0 רק באלכסון הראשי ובשני האלכסונים שצמודים לו (מעל ומתחת). במקרה זה פירוק LU דורש $O(n)$ פעולות.

2 נורמות

הגדרה 2.1 נורמה על $\mathbb{R}^n$ היא פונקציה $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ המקיימת:

1. לכל $x \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $\|x\| \geq 0$.

2. $\|x\| = 0$ אם ורק אם $x = 0$.

3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

נורמות שימושיות:

1. נורמת l_∞ :

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

2. נורמת l_2 :

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^T x}$$

3. נורמת l_1 :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

4. נורמת l_p :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

2.1 שקילות נורמות

משפט 2.2 יהיו $\|\cdot\|'$, $\|\cdot\|$ שתי נורמות כלשהן על $\mathbb{R}^n$. אז קיימים שני קבועים m, M עבורם לכל $x \in \mathbb{R}^n$ מתקיים

$$m \|x\|' \leq \|x\| \leq M \|x\|'$$

הוכחה: מספיק להוכיח שכל נורמה $\|\cdot\|$ שקולה לנורמה $\|\cdot\|_2$. נכתוב את הווקטור x בתור

$$x = \sum_j x_j e_j$$

כאשר e_j הם ווקטורי הבסיס הסטנדרטי. אזי

$$\|x\| = \left\| \sum_j x_j e_j \right\| \leq \sum_j |x_j| \|e_j\| \leq \|x\|_2 \underbrace{\sum_j \|e_j\|}_M = M \|x\|_2$$

כדי להראות את החלק השני של השקילות, נראה תחילה כי $\|\cdot\|$ היא רציפה, כלומר אם

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^{(n)} - x\|_2 = 0$$

אזי גם

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^{(n)}\| = \|x\|$$

הסיבה לזה היא:

$$\left| \|x^{(n)}\| - \|x\| \right| \leq \|x^{(n)} - x\| \leq M \|x^{(n)} - x\|_2 \rightarrow 0$$

נתבונן בקבוצה $S = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\|_2 = 1\}$. זו קבוצה סגורה וחסומה, ולכן ממשפט וויירשטראס, הפונקציה הרציפה $\|\cdot\|$ מקבלת עליה מינימום. כלומר, קיימת נקודה y_0 כך שלכל y עם $\|y\|_2 = 1$, מתקיים

$$\|y\| \leq \|y_0\|$$

נסמן $m = \|y_0\| > 0$, כי $y_0 \neq 0$. ניקח כעת $x \in \mathbb{R}^n$ ואז

$$\|x\| = \|x\|_2 \cdot \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \geq m \|x\|_2$$

■

וסיימנו.

נעיר שלצרכים פרקטיים יש הבדל בין הנורמות, למשל אם רוצים למצוא נקודה שממזערת מרחק מאוסף נקודות נתון - בנורמת 2 נקבל ממוצע, ובנורמת 1 חציון.

2.2 נורמות של מטריצות

אלה הן נורמות שמוגדרות על מטריצות בגודל $n \times n$.

משפט 2.3 אם $\|\cdot\|$ היא נורמה כלשהי על $\mathbb{R}^n$, אזי

$$f(A) = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

היא נורמה על מטריצות. נורמה כזו נקראת נורמה מושרית.

מתקיים

$$\|A\| := f(A) = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{x \neq 0} \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\|$$

למה 2.4 לכל נורמה מושרית מתקיים

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

הוכחה:

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|$$

■

משפט 2.5 תהי A מטריצה בגודל $n \times n$. אזי

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} \|Ax\|_\infty &= \max_i |(Ax)_i| = \max_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \leq \max_i \sum_j |x_j| |a_{ij}| \leq \\ &\leq \max_j |x_j| \max_i \sum_j |a_{ij}| = \|x\|_\infty \max_i \sum_j |a_{ij}| \end{aligned}$$

לכן נקבל

$$\|A\|_\infty = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

בכיוון השני, תהי i_0 השורה שעליה המקסימום מתקבל. נגדיר

$$\tilde{x}_j = \begin{cases} 1 & a_{i_0,j} > 0 \\ -1 & a_{i_0,j} < 0 \end{cases}$$

בבירור, $\|\tilde{x}\|_\infty = 1$. כמו כן,

$$\|A\tilde{x}\|_\infty = \max_j |(A\tilde{x})_i| \geq |(A\tilde{x})_{i_0}| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} \tilde{x}_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|$$

אזי

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq \|A\tilde{x}\| \geq \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

■

הגדרה 2.6 נורמת פרובניוס של מטריצה A מוגדרת על ידי

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{i,j}|^2}$$

הערה 2.7 נורמת פרובניוס אינה מושרית.

הוכחה: לכל נורמה מושרית מתקיים

$$\|I\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ix\|}{\|x\|} = 1$$

אבל

$$\|I\|_F = \sqrt{n}$$

■

הגדרה 2.8 הרדיוס הספקטרי של מטריצה מוגדר על ידי $\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$, כלומר הערך המוחלט המקסימי של ערך עצמי של A (הם הערכים העצמיים של A).

משפט 2.9

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

■

הוכחה: בשיעור הבא.

מסקנה 2.10 אם $A = A^T$ אזי

$$\|A\|_2 = \rho(A)$$

הוכחה:

$$\|A\|_2^2 = \rho(A^T A) = \rho(A^2) = \rho(A)^2$$

■

למה 2.11 לכל נורמה מושרית מתקיים

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

הוכחה: נניח כי $\rho(A) = |\lambda_n|$, כאשר $Av_n = \lambda_n v_n$. אזי

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Av_n\|}{\|v_n\|} = \frac{|\lambda_n| \|v_n\|}{\|v_n\|} = \rho(A)$$

■