

אנליזה נומרית 1

© ארזים

20 באפריל 2017

1 פירוק LU

נתונה מטריצה A . נבצע פעולות על שורות: נגדיר

$$m_{i,k} = \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}$$

וכעת

$$R_i^{(k+1)} = R_i^{(k)} - m_{i,k} R_k^{(k)}$$

כלומר

$$a_{i,j}^{(k+1)} = a_{i,j}^{(k)} - m_{i,k} a_{k,j}^{(k)}$$

נקבל לבסוף שתי מטריצות:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$
$$U = A^{(n)}$$

ברור כי L משולשית תחתונה, U משולשית עליונה.

משפט 1.1

$$A = LU$$

הוכחה: נחשב:

$$(LU)_{i,j} = (m_{i,1}, \dots, m_{i,i-1}, 1, 0, \dots, 0) \cdot \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ \vdots \\ u_{j,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

כעת, אם $i \leq j$, כלומר האיבר הוא על או מעל לאלכסון:

$$\begin{aligned} (LU)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{i-1} m_{i,k} u_{k,j} + u_{i,j} = \sum_{k=1}^{i-1} m_{i,k} a_{k,j}^{(k)} + a_{i,j}^{(i)} = \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} (a_{i,j}^{(k)} - a_{i,j}^{(k+1)}) + a_{i,j}^{(i)} = a_{i,j}^{(1)} = a_{i,j} \end{aligned}$$

אם $i > j$, כלומר האיבר מתחת לאלכסון:

$$\begin{aligned} (LU)_{i,j} &= \sum_{k=1}^j m_{i,k} u_{k,j} = \sum_{k=1}^j m_{i,k} a_{k,j}^{(k)} = \sum_{k=1}^j (a_{i,j}^{(k)} - a_{i,j}^{(k+1)}) = \\ &= a_{i,j}^{(1)} - a_{i,j}^{(j+1)} = a_{i,j}^{(1)} = a_{i,j} \end{aligned}$$

■

לכן סיימנו.

כעת נרצה לחשב את סיבוכיות האלגוריתם.

1. חישוב $A^{(k+1)}$: יש לבצע $n-k$ פעולות חילוק כדי לחשב $n-k$ כופלי שורה, $(n-k)^2$ פעולות כפל ועוד $(n-k)^2$ פעולות חיסור. סך הכל פעולות חילוק:

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2} \approx \frac{n^2}{2}$$

סך הכל פעולות כפל (או חיסור):

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \approx \frac{n^3}{3}$$

לכן שלב זה לוקח $\frac{2n^3}{3}$.

2. הפיכת הווקטור המקורי b לווקטור החדש g . בשלב k יש לבצע $n-k$ פעולות כפל ועוד $n-k$ פעולות חיסור. סך הכל n^2 פעולות.

3. פתרון $Ux = g$. בשלב k יש לבצע $n - k$ פעולות כפל ועוד $n - k$ פעולות חיסור, ועוד פעולת חילוק יחידה. סך הכל n^2 פעולות.

בסך הכל הסיבוכיות היא $\frac{2n^3}{3}$. שימושים לפירוק LU :

1. פתרון $Ax = b$.

2. חישוב דטרמיננטה.

3. אם נתונות מספר משוואות מהצורה $Ax_m = b_m$ (m מערכות). אם היינו פותרים כל מערכת בנפרד, הסיבוכיות הייתה $\frac{2}{3}mn^3$. אם נפרק את A פעם אחת פירוק LU , ונפתור M מערכות מהצורה $LUx_m = b_m$, על ידי פתרון

$$Ly_m = b_m$$

$$Ux_m = y_m$$

סך כל הפעולות עבור M אגפי ימין הוא $\frac{2}{3}n^3 + 2n^2m$.

4. חישוב A^{-1} - נפתור את

$$A(x_1, \dots, x_n) = I_n$$

ונקבל סיבוכיות

$$\frac{2}{3}n^3 + 2n^3 = \frac{8}{3}n^3$$

הערה 1.2 את L, U מאחסנים לרוב במטריצה אחת - זורקים את האחדים על האלכסון של L , שידוע שהם שם.

מה קורה אם $a_{k,k}^{(k)}$ קטן?

דוגמא נבצע חישובים בארבע ספרות, ונפתור

$$10^{-6}x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

הפתרון הוא $x_1 = 1, x_2 = 1$. נפתור על פי אלימינציית גאוס: נקבל

$$10^{-6}x_1 + x_2 = 1$$

$$-10^6x_2 = -10^6$$

מכאן $x_1 = 0, x_2 = 1$. הבעיה הזו יכולה להתרחש כאשר

$$a_{k,k}^{(k)} \ll a_{k,j}^{(k)} b_k^{(k)}$$

כאשר $j > k$.

דוגמה דומה:

$$\begin{aligned}10^{-6}x_1 + 10^{-6}x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 1\end{aligned}$$

לפי אלימינציית גאוס נקבל

$$\begin{aligned}10^{-6}x_1 + 10^{-6}x_2 &= 2 \cdot 10^{-6} \\ x_2 &= 1\end{aligned}$$

מכאן נקבל גם $x_1 = 1$ וזה הפתרון הנכון.

יש שני פתרונות לבעיה הזו:

1. שיטת complete pivoting (החלפת שורות ועמודות): בשלב k מוצאים $i_0, m_0 \geq k$ כך שמתקיים

$$\left| a_{i_0, m_0}^{(k)} \right| = \max_{i, m \geq k} \left| a_{i, m}^{(k)} \right|$$

ואז מחליפים שורה k עם שורה i_0 , ועמודה k עם עמודה m_0 .

2. שיטת partial pivoting, שנראה בשיעור הבא.