

אנליזה נומרית 1

© ארזים

2 באפריל 2017

1 מציאת שורשים

נחזור לקצב התכנסות שיטת המיתר. ראינו כי

$$e_{n+1} \approx \lambda^{1+\alpha} e_{n-1}^{\alpha^2}$$

$$e_{n+1} \approx \frac{f''}{2f'} \lambda e_{n-1}^{\alpha+1}$$

כעת, ננסה להוציא מכאן את λ, α . נקבל

$$\lambda^{1+\alpha} e_{n-1}^{\alpha^2} = \frac{f''}{2f'} e_{n-1}^{\alpha+1}$$

$$\frac{2\lambda^\alpha f'}{f''} = e_{n-1}^{\alpha+1-\alpha^2}$$

אם $-\alpha^2 + \alpha + 1 \neq 0$ נקבל דברים לא הגיוניים (או שאגף ימין יהיה גדול מדי או קטן מדי). לכן

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

כי הוא חיובי.

1.1 מערכות משוואות

דוגמא

$$x^3 + e^{xy} + 3 = 0$$

$$x^4 + y^3 - 7 = 0$$

באופן כללי יש לנו מערכות

$$F(x, y) = 0$$

$$G(x, y) = 0$$

נכליל את שיטת ניוטון. אמרנו כי

$$f(r) \approx f(x_n) + (r - x_n) f'(x_n)$$

$$r \approx x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

וכך עושים איטרציות. בכמה משתנים - נתונה המערכת $F_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ $1 \leq i \leq n$, נגדיר

$$F = (F_1, \dots, F_n)^T$$

$$x = (x_1, \dots, x_n)^T$$

נפתח את F בסביבת x :

$$F_i(x + \Delta x) = F_i(x) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \Delta x_j + o(\Delta x^2)$$

בסך הכל:

$$F(x + \Delta x) = F(x) + J\Delta x + o(\Delta x^2)$$

כאשר

$$J = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{i,j}$$

נפתור:

$$F(x) + J\Delta x = 0$$

קיבלנו מערכת משוואות לינארית. הפתרון הוא

$$J\Delta x = -F(x)$$

ולכן העדכון הוא

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x$$

מסתבר שיש דרכים מאוד קלות לעשות מינימליזציה של פונקציה (ולא בהכרח צריך לגזור ולאפס את הנגזרת). כך אפשר תיאורטית להקל על מציאת שורשים - בהינתן:

$$F(x, y) = 0$$

$$G(x, y) = 0$$

נגדיר

$$H(x, y) = F^2(x, y) + G^2(x, y)$$

ונמצא מינימום.

2 אלגברה לינארית

2.1 שיטות ישירות לפתרון של מערכות משוואות

נרצה לפתור את המערכת

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

נסמן $A = (a_{ij})_{i,j}$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $b = (b_1, \dots, b_n)^T$. אנחנו נעסוק רק במטריצות צפופות, שבהן רוב האיברים אינם 0.

2.1.1 כלל קרמר

נסמן בתור A_i את המטריצה A שבה מחיפים את העמוד i בוקטור b . אזי

$$x_j = \frac{|A_i|}{|A|}$$

חישוב דטרמיננטה הוא קשה:

$$\det A = \sum_p \text{sign}(p) a_{1,p(1)} \cdots a_{n,p(n)}$$

כאשר הסכום הוא על פני פרמוטציות של $\{1, \dots, n\}$. סך הפעולות הוא $n! \cdot n$. כדי להשתמש בכלל קרמר צריך לחשב $n+1$ דטרמיננטות, ובסך הכל, $n(n+1)!$ פעולות. אם A מגודל 10×10 מספר הפעולות הוא בערך $4 \cdot 10^8$. זה מאוד לא יעיל.

דוגמא נפתור את המערכת

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$$

$$-x_1 - 3x_2 = 2$$

בצורה מטריציונית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

נבצע אלימינציה גאוס. נסמן R_i את השורה i , ועשה פעולות מהצורה $R_i \leftarrow R_i - m_{ij}R_j$. נבצע:

$$\begin{aligned} R_2 &\leftarrow R_2 - m_{21}R_1, m_{21} = 2 \\ R_3 &\leftarrow R_3 - m_{31}R_1, m_{31} = -1 \end{aligned}$$

נקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

לבסוף

$$R_3 \leftarrow R_3 - m_{32}R_2, m_{32} = \frac{1}{2}$$

ונקבל מטריצה משולשית עליונה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

נפתור כעת על ידי הצבה לאחור.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_3 &= \frac{1}{2} \Rightarrow x_3 = 1 \\ -2x_2 + x_3 &= 3 \Rightarrow x_2 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \Rightarrow x_1 = 1 \end{aligned}$$

2.1.2 אלימינציה גאוס - מקרה כללי

רעיון נבצע פעולות על שורות המטריצה המורחבת $(A | b)$ כדי לקבל מטריצה משולשית עליונה, ואז נפתור על ידי הצבה לאחור. נסמן את המטריצה המקורית $A^{(1)}$.

האלגוריתם

1. נניח $a_{11}^{(1)} \neq 0$. נגדיר את כופלי השורות:

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$$

וכעת נאפס את המקדם של x_1 בכל השורות:

$$R_i^{(2)} = R_i^{(1)} - m_{i1} R_1^{(1)}$$

כעת קיבלנו את המערכת

$$A^{(2)}x = b^{(2)}$$

נמשיך באותה שיטה, עד שנקבל מטריצה משולשית עליונה.

2. כעת יש לנו מערכת מהצורה

$$A^{(n)}x = b^{(n)}$$

כאשר $A^{(n)}$ משולשית עליונה. נבצע הצבה לאחור. נסמן $U = A^{(n)}$, $g = b^{(n)}$ אזי

$$x_n = \frac{g_n}{U_{nn}}$$

$$x_k = \frac{1}{U_{kk}} \left(g_k - \sum_{j=k+1}^n U_{kj} x_j \right)$$

משפט 2.1 נסמן U את המטריצה שהתקבלה בתהליך האלימינציה, ונסמן

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

כאשר $m_{i,j}$ הם כופלי השורות מהאלגוריתם. אזי $A = LU$.

ההוכחה תהיה בפעם הבאה. נוכל לחשב בעזרת זה דטרמיננטה מהר:

$$\det A = \det L \det U = \det U = \prod_{i=1}^n U_{ii}$$