

אנליזה נומרית

© ארזים

30 במרץ 2017

1 איטרציות נקודת שבת

ראינו שאם יש לנו איטרציה $x_{n+1} = g(x_n)$ עם $|g'(x)| \leq k < 1$, אזי

$$|x_n - r| \leq k^n |x_0 - r|$$

1.1 קצב התכנסות

נתונה סדרה $\{x_n\} \rightarrow r$. השגיאה באיטרציה n היא $e_n = x_n - r$.

הגדרה 1.1 אם

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^\alpha} = \lambda \neq 0$$

אזי הסדרה x_n מתכנסת אל r בקצב α עם קבוע אסימפטוטי λ . אם $\alpha = 1$ הקצב נקרא לינארי, אם $\alpha = 2$ הוא נקרא ריבועי.

בקצב התכנסות לינארי:

$$|e_{n+1}| \approx \lambda |e_n| \approx \lambda^2 |e_{n-1}| \approx \dots$$

חייב להתקיים $\lambda < 1$. ככל שהקבוע λ קטן יותר, ההתכנסות מהירה יותר. כמו כן, נדרש מספר קבוע של איטרציות כדי לקבל ספרת דיוק נוספת.
בקצב התכנסות ריבועי:

דוגמה ניקח $\lambda = 1, \alpha = 2, e_1 = 0.1$.

$$|e_2| = |e_1|^2 = 0.01$$

$$|e_3| = |e_2|^2 = 10^{-4}$$

וכן הלאה.

מספר הספרות המדוייקות מוכפל בכל איטרציה. כמו כן, אין חשיבות לערך של λ , וההתכנסות הרבה יותר מהירה מהמקרה הלינארי.

משפט 1.2 נניח שנתונה איטרציית נקודת שבת שמתכנסת:

$$g \in C^2, x_{n+1} = g(x_n), x_n \rightarrow r$$

אזי אם $0 < |g'(r)| < 1$ אזי קצב ההתכנסות לינארי ($\alpha = 1$) עם $\lambda = |g'(r)|$. אם $g'(r) = 0$ אז קצב ההתכנסות לפחות ריבועי $\alpha \geq 2$.

הוכחה: ראשית נניח כי $0 < |g'(r)| < 1$. נחשב:

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{x_{n+1} - r}{x_n - r} = \frac{g(x_n) - g(r)}{x_n - r} = g'(\eta_n), \eta_n \in [x_n, r]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e_{n+1}}{e_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |g'(\eta_n)| = |g'(r)|$$

כעת נניח כי $g'(r) = 0$. נפתח טיילור:

$$g(x_n) = g(r) + \underbrace{g'(r)}_{=0}(x_n - r) + \frac{g''(\eta_n)(x_n - r)^2}{2}$$

ולכן

$$e_{n+1} = x_{n+1} - r = g(x_n) - g(r) = \frac{g''(\eta_n)(x_n - r)^2}{2}$$

כלומר

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|g(x_n) - g(r)|}{|x_n - r|^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} g''(\eta_n) = \frac{1}{2} g''(r)$$

כלומר סדר ההתכנסות תלוי בהתאפסות $g''(r)$. ■

דוגמא נניח ששיטת המיתר מתכנסת, $f'(r) \neq 0$, $f''(r) \neq 0$. אזי קצב ההתכנסות של שיטת המיתר הוא $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. האיטרציה היא

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$e_{n+1} = e_n - f(x_n) \frac{e_n - e_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} =$$

$$= \frac{e_n(f(x_n) - f(x_{n-1})) - f(x_n)(e_n - e_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = \frac{f(x_n)e_{n-1} - f(x_{n-1})e_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

מפיתוח טיילור:

$$f(x_n) = f(r + e_n) = f(r) + f'(r)e_n + \frac{1}{2}f''(r)e_n^2$$

את השארית נזניח. המכנה:

$$f(x_n) - f(x_{n-1}) \approx f'(r)(e_n - e_{n-1})$$

המונה:

$$\begin{aligned} \left(f'(r)e_n + \frac{1}{2}f''(r)e_n^2\right)e_{n-1} - \left(f'(r)e_{n-1} + \frac{1}{2}f''(r)e_{n-1}^2\right)e_n = \\ = \frac{1}{2}f''(r)e_ne_{n-1}(e_n - e_{n-1}) \end{aligned}$$

בסך הכל

$$e_{n+1} = \frac{f''(r)e_ne_{n-1}}{2f'(r)}$$

ניזכר כי לפי הגדרת קצב התכנסות:

$$e_{n+1} \approx \lambda e_n^\alpha \approx \lambda^{\alpha+1} e_{n-1}^{\alpha^2} \approx \dots$$

ולכן

$$\begin{aligned} \frac{f''(r)e_ne_{n-1}}{2f'(r)} \approx e_{n+1} \approx \frac{f''(r)}{2f'(r)} \lambda e_{n-1}^\alpha e_{n-1} = \frac{\lambda e_{n-1}^{\alpha+1} f''(r)}{2f'(r)} \\ \lambda^{\alpha+1} e_{n-1}^{\alpha^2} = \frac{\lambda e_{n-1}^{\alpha+1} f''(r)}{2f'(r)} \\ \lambda^\alpha = \frac{f''(r)}{2f'(r)} \end{aligned}$$

ומתקיים

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \alpha + 1 \\ \alpha &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

בשביל התכנסות צריך את החיובי.