

אנליזה נומרית 1

© ארזים

23 במרץ 2017

1 מציאת שורשים

1.1 שיטת החצייה

בשיעור שעבר דיברנו על שיטת החצייה. ראינו כי

$$|x_n - r| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

ולכן כדי להשיג דיוק מוחלט ε צריך לבצע מספיק איטרציות בשביל שיתקיים

$$\begin{aligned} |x_n - r| &\leq \frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \\ n &> \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} \end{aligned}$$

נותר רק להחליט מתי לעצור את האלגוריתם.

1.1.1 קריטריון עצירה

1. תנאי שגוי - $f(x_n) = 0$. גם עבור השורש, ייתכן שיתקיים $f(r) \neq 0$ בגלל שגיאות עיגול בדיוק כפול, אם בכלל ניתן לייצג את השורש בדיוק כפול.

2. אפשר לרוץ עד שמתקיים $|f(x_n)| < tol$, כאשר tol ערך קטן ששולט על הדיוק שאנחנו רוצים. זה לא עובד: נגדיר

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2 \cos x - x \\ f_2(x) &= 10^{10} f_1(x) \\ f_3(x) &= 10^{-10} f_1(x) \end{aligned}$$

על כולן נעשה את אותה סדרת חצייה. אבל אם $|f_1(x)| < tol$, יכול עדיין להתקיים $|f_2(x)| \gg tol$, ולכן נעשה צעדים מיותרים. f_3 תעצור מוקדם מדי.

3. אפשר לרוץ עד דיוק יחסי רצוי:

$$\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} \right| < tol$$

תנאי זה לא עובד בסביבת אפס.

4. בעזרת החסם מהמשפט: $|x_n - r| \leq \frac{b-a}{2^n}$. נבחר את n כך שהחסם המוחלט על הסטייה מהשורש יהיה כמו שנרצה. כלל אצבע טוב:

$$tol = \varepsilon_M \left(\frac{|a| + |b|}{2} \right)$$

זה החסם שנרצה על אורך הקטע בשלב n . בנוסף, אם נחסום את מספר האיטרציות על ידי 40, נקבל שהדיוק (ליד 1) הוא בערך 10^{-12} .

אפילו אם $f(x)$ קטן, אי אפשר להסיק כי x קרוב לשורש.

הגדרה 1.1 שורש α של $f(x)$ נקרא פשוט אם $f(\alpha) = 0, f'(\alpha) \neq 0$.

נניח כי $f'(x)$ לא מתאפסת בסביבת השורש. נפתח טיילור:

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\eta)(x - \alpha) = (x - \alpha)f'(\eta)$$

כאשר $x \leq \eta \leq \alpha$ אזי

$$x - \alpha = \frac{f(x)}{f'(\eta)}$$

נכתוב

$$f(x_n) = \tilde{f}(x_n) + \delta(x_n)$$

כאשר $\tilde{f}$ מחושב בדיוק סופי, $|\delta(x_n)| \leq \delta$. קיבלנו

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{|\tilde{f}(x_n)| + |\delta|}{|f'(\eta)|}$$

במקרה הטוב ביותר $\tilde{f}(x_n) = 0$, ואז אם נניח כי $f'(\alpha) \approx f'(\eta)$, כלומר הנגזרת משתנה לאט, אזי

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{\delta}{|f'(\alpha)|}$$

כל החישוב הזה נכון לכל שיטה למציאת שורשים, ולכן אם הפונקציה בעייתית - הנגזרת בשורש קטנה - אי אפשר להגיע לדיוק טוב.

הגדרה 1.2 α שורש מריבוי q אם $f(\alpha) = 0, f'(\alpha) = 0, \dots, f^{(q-1)}(\alpha) = 0, f^{(q)}(\alpha) \neq 0$.

מטיילור

$$f(x) = \frac{1}{q!} f^{(q)}(\alpha) (x - \alpha)^q$$

כמו קודם נקבל

$$|x - \alpha| \leq \left(\frac{q! \delta}{f^{(q)}(\alpha)} \right)^{\frac{1}{q}}$$

דוגמא $f(x) = (x-2)x + 1 = 0$ למשוואה יש שורש כפול בנקודה $x = 1$. נחשב בדיוק אינסופי:

$$f(1 + \varepsilon) = (\varepsilon - 1)(1 + \varepsilon) + 1 = \varepsilon^2$$

נניח שמתמשים בשמונה ספרות דיוק, אזי

$$f(1 - \varepsilon^2) = 1$$

כאשר $|\varepsilon| \leq \frac{2}{\sqrt{2}} 10^{-4}$ אזי אם

$$0.9992999 \leq x \leq 1.0000707$$

הערך של $f(x)$ יהיה 0.