

אנליזה נומרית 1

© ארזים

18 ביוני 2017

1 אינטגרציית גאוס

דיברנו על פולינומי לז'נדר ועל התכונות שלהם.

משפט 1.1 יהיו $x_1, \dots, x_n$ השורשים של p_n , ויהיו

$$w_k = \int_{-1}^1 \prod_{i \neq k} \frac{(x - x_i)}{x_k - x_i} dx$$

מעלת הדיוק של כלל האינטגרציה

$$\sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

היא $2n - 1$.

הוכחה: יהי $p(x)$ פולינום ממעלה לכל היותר $2n - 1$. נכתוב

$$p(x) = q(x)p_n(x) + r(x)$$

כאשר $q(x), r(x)$ הם ממעלה לכל היותר $n - 1$. אזי

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 p &= \int_{-1}^1 qp_n + \int_{-1}^1 r = \int_{-1}^1 r \\ \sum_{k=1}^n w_k p(x_k) &= \sum_{k=1}^n w_k q(x_k) p_n(x_k) + \sum_{k=1}^n w_k r(x_k) = \\ &= \sum_{k=1}^n w_k r(x_k) = \int_{-1}^1 r dx \end{aligned}$$

השוויון האחרון נכון כי ראינו שכל כלל אינטגרציה הוא בעל מעלת דיוק לפחות $n - 1$, ולכן סיימנו. ■

1.1 פולינומים אורתונורמליים

למה 1.2 פולינומי צ'בישב מקיימים

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$$

עבור $n \neq m$. ניזכר

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

הוכחה: נגדיר $\phi = \arccos x \in [0, \pi]$. לכן $x = \cos \phi$ ואז $dx = -\sin \phi d\phi$, כלומר

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = d\phi$$

נציב ונקבל

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = - \int_0^\pi \cos(n\phi) \cos(m\phi) d\phi = 0$$

■

הגדרה 1.3 נגדיר מכפלה פנימית על (a, b) עם פונקציית משקל $f(x) > 0$:

$$\langle g, h \rangle = \int_a^b g(x) h(x) f(x) dx$$

הגדרה 1.4 g, h ניצבים אם $\langle g, h \rangle = 0$.

הגדרה 1.5 $\{p_n(x)\}$ היא סדרת פולינומים אורתוגונליים אם p_n פולינום ממעלה n ולכל $i \neq j$ מתקיים $\langle p_i, p_j \rangle = 0$.

למה 1.6 תהי $\{p_n(x)\}$ משפחה כלשהי של פונקציות אורתוגונליות ביחס לפונקציית משקל כלשהי. אזי לכל פולינום p ממעלה לכל היותר n קיימים מקדמים $a_0, \dots, a_k$ המקיימים

$$p(x) = \sum_{j=0}^k a_j p_j(x)$$

למה 1.7 תהי $\{p_n(x)\}$ משפחה כלשהי של פונקציות אורתוגונליות ביחס לפונקציית משקל כלשהי. אזי כל פולינום ממעלה לכל היותר $k-1$ ניצב לפולינום p_k .

למה 1.8 תהי $\{p_n(x)\}$ משפחה כלשהי של פונקציות אורתוגונליות ביחס לפונקציית משקל כלשהי. אזי לפולינום $p_k(x)$ יש k שורשים פשוטים בקטע (a, b) .

את הדברים הללו הוכחנו לפולינומי לז'נדר, ואותה הוכחה עובדת גם כאן.

למה 1.9 תהי $\{p_n(x)\}$ משפחה כלשהי של פונקציות אורתוגונליות ביחס לפונקציית משקל כלשהי. נניח כי $p_n = 1$ אזי

$$p_{n+1} = (x - \beta_n) p_n(x) - \gamma_n^2 p_{n-1}(x)$$

עם תנאי התחלה $p_0(x) = 1, p_{-1}(x) = 0$. המקדמים נתונים על ידי

$$\beta_n = \frac{\langle xp_n, p_n \rangle}{\langle p_n, p_n \rangle}$$

$$\gamma_n^2 = \frac{\langle p_n, p_n \rangle}{\langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle}$$

כאשר $\gamma_0 = 1$.

הוכחה: באינדוקציה. נניח שבנינו את $p_0, \dots, p_n$, ונבנה את p_{n+1} מתוקן שאורתוגונלי לכל הקודמים. הפולינום $p_{n+1} - xp_n$ הוא ממעלה n ולכן

$$p_{n+1} = xp_n - \sum_{j=0}^n c_j p_j$$

עבור $0 \leq j \leq n$ מתקיים

$$0 = \langle p_{n+1}, p_j \rangle = \langle xp_n, p_j \rangle - \sum_{i=0}^n c_i \langle p_i, p_j \rangle$$

ומכאן

$$\langle xp_n, p_j \rangle = c_j \langle p_j, p_j \rangle$$

לכן c_j נקבע ביחידות. כעת, $\langle xp_n, p_j \rangle = \langle p_j, xp_n \rangle$, מההגדרה, והפולינום xp_j הוא ממעלה $j+1$. לכן $\langle p_n, xp_j \rangle = 0$ עבור $j+1 > n$. לכן עבור $j < n-1$ מתקיים $c_j = 0$ לכן למעשה קיבלנו

$$p_{n+1} = xp_n - c_n p_n - c_{n-1} p_{n-1} = (x - c_n) p_n - c_{n-1} p_{n-1}$$

כאשר

$$c_n = \beta_n = \frac{\langle xp_n, p_n \rangle}{\langle p_n, p_n \rangle}$$

$$c_{n-1} = \gamma_n^2 = \frac{\langle xp_n, p_{n-1} \rangle}{\langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle}$$

נפשט את האחרון:

$$\frac{\langle xp_n, p_{n-1} \rangle}{\langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle} = \frac{\langle p_n, xp_{n-1} \rangle}{\langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle}$$

כעת

$$\langle p_{n+1}, p_{n+1} \rangle = \langle p_{n+1}, xp_n \rangle - \sum_{i=0}^n c_i \underbrace{\langle p_i, p_{i+1} \rangle}_0$$

■ ומכאן נקבל בדיוק מה שרצינו בניסוח הלמה.
 ראינו שעבור פולינומי לז'נדר פונקציית המשקל היא $\rho(x) = 1$. עבור פולינומי צ'בישב היא $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

דוגמה נחשב את

$$\int_{-1}^1 \frac{e^{x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

נשים לב שיש סינגולריות בקצות הקטע. לכן נכתוב

$$\int_{-1}^1 e^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

זו מכפלה פנימית לפי פונקציית המשקל $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. לכן נחפש כלל אינטגרציה מהצורה

$$\int_{-1}^1 f(x) \rho(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)$$

הבעיות שנוצרות הן עם פונקציות עם סינגולריות ועם קטעים אינסופיים. באופן כללי, עבור כל פונקציית משקל $\rho(x)$ מתקיים:

1. לכל $\{x_k\}_{k=1}^n$ מעלת הדיוק היא לכל היותר $2n-1$.
2. מעלת הדיוק שווה ממש $2n-1$ אם x_k הושרישם של $p_n(x)$ שאורתוגונליים ביחס למשקל $\rho(x)$.

יש גם את פולינומי הרמיט, שעובדים כאשר $\rho(x) = e^{-x^2}$, המוגדרים על ידי

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x)$$

משפט 1.10 נניח כי $f \in C^{2n}[a, b]$ וכי $\{x_k, w_k\}_{k=1}^n$ משקלות ונקודות המתאימות לפונקציית משקל ρ . נניח כי p_n מנורמלים כך שהם מתוקנים. אזי

$$\int_a^b f(x) \rho(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b p_n^2(x) \rho(x) dx$$

הוכחה: נשתמש בשגיאה באינטרפולציה. נעביר פולינום אינטרפולציה בצורת ניוטון דרך $x_0, \dots, x_n$ ונקרא לו $Q_n(x)$, ודרך $x_0, \dots, x_n, \tilde{x}$ כלשהי ונקרא לו $Q_{n+1}(x)$. כעת

$$Q_{n+1}(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^n f[x_0, \dots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) + f[x_0, \dots, x_n, \tilde{x}] \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

כעת, $Q_{n+1}(\tilde{x}) = f(\tilde{x})$ נקבל

$$E_n(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) - Q_n(\tilde{x}) = Q_{n+1}(\tilde{x}) - Q_n(\tilde{x}) = f[x_0, \dots, x_n, \tilde{x}] \prod_{j=0}^n (\tilde{x} - x_j)$$

אבל אנחנו מכירים ביטוי לשגיאה מאינטרפולציה:

$$f[x_0, \dots, x_n, \tilde{x}] \prod_{j=0}^n (\tilde{x} - x_j) = E_n(\tilde{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (\tilde{x} - x_j)$$

ולכן

$$f[x_0, \dots, x_n, \tilde{x}] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

כעת נגדיר הפרש מחולק עם נקודה כפולה על ידי גבול

$$f[x_0, x_0] = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$$

$$f[x_0, x_0, x_1] = \frac{f'(x_0) - f[x_0, x_1]}{x_0 - x_1}$$

כעת, יהי $p_n(x)$ פולינום אורתוגונלי ממעלה n שמתאים למשקל $\rho(x)$. נסמן $x_1, \dots, x_n$ את שורשיו, משמע

$$p_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j)$$

כעת

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \rho(x) \, dx - \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) &= \int_a^b f(x) \rho(x) \, dx - \sum_{k=1}^n w_k Q_n(x_k) = \\ &= \int_a^b f(x) \rho(x) \, dx - \int_a^b Q_n(x) \rho(x) \, dx \end{aligned}$$

וזאת בגלל מעלת הדיוק. נמשיך:

$$= \int_a^b (f(x) - Q_n(x)) \rho(x) \, dx = \int_a^b f[x_1, \dots, x_n, x] p_n(x) \rho(x) \, dx$$

ניזכר כעת שמתקיים מאורתוגונליות

$$\int_a^b p_n(x) \rho(x) \, dx = \int_a^b p_n(x) p_0(x) \rho(x) \, dx = 0$$

כעת, לפי נוסחת ההפרשים המחולקים:

$$\begin{aligned} f[x, x_1, \dots, x_n, y_1] &= \frac{f[x, x_1, \dots, x_n] - f[x_1, \dots, x_n, y_1]}{x - y_1} \\ f[x, x_1, \dots, x_n, y_1] (x - y_1) &= f[x, x_1, \dots, x_n] - f[x_1, \dots, x_n, y_1] \end{aligned}$$

ניקח אינטגרל:

$$\begin{aligned} E &= \int_a^b ((x - y_1) f[x, x_1, \dots, x_n, y_1] + f[x_1, \dots, x_n, y_1]) p_n(x) \rho(x) \, dx = \\ &= \int_a^b (x - y_1) f[x, x_1, \dots, x_n, y_1] p_n(x) \rho(x) \, dx \end{aligned}$$

■