

אנליזה נומרית 1

© ארזים

18 ביוני 2017

1 אינטגרציית גאוס

הגדרנו את פולינומי לז'נדר:

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2 - 1)^n \right)$$

למה 1.1 הפולינום p_n אורתוגונליים, משמע

$$\int_{-1}^1 p_n(x) p_m(x) dx = 0$$

כאשר $n \neq m$.

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות, $m < n$. נשמיט את הקבועים מהגדרת הפולינומים:

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \int_{-1}^1 \frac{d^m}{dx^m} \left((x^2 - 1)^m \right) \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2 - 1)^n \right) dx = \\ &= \frac{d^m}{dx^m} \left((x^2 - 1)^m \right) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left((x^2 - 1)^n \right) dx \Big|_{-1}^1 - \\ &\quad - \int_{-1}^1 \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} \left((x^2 - 1)^m \right) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left((x^2 - 1)^n \right) dx \end{aligned}$$

הגורם הראשון כאן מתאפס, כי שתי הנגזרות מתאפסות בנקודות ± 1 . נבצע עוד אינטגרציות בחלקים עד שנקבל

$$I_{m,n} = (-1)^n \int_{-1}^1 \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} \left((x^2 - 1)^m \right) (x^2 - 1)^n dx$$

■ אבל $m + n > 2m$ ולכן הגזירה הראשונה מתאפסת.
 מההגדרה אפשר לחשב את הפולינומים, אבל הם מקיימים את הנוסחה הרקורסיבית הנוחה הבאה:

$$p_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xp_n(x) - \frac{n}{n+1}p_{n-1}(x)$$

1.2 למה

$$\int_{-1}^1 p_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}(n+1)p_{n+1}(x) - (2n+1)xp_n(x) + np_{n-1}(x) &= 0 \\ np_n(x) - (2n-1)xp_{n-1}(x) + (n-1)p_{n-2}(x) &= 0\end{aligned}$$

נכפול את המשוואה הראשונה ב- p_{n-1} ואת השנייה ב- p_n , וניקח אינטגרל - נזכור שהאינטגרל של מכפלת שני פולינומים מאינדקסים שונים הוא 0 ונקבל

$$\begin{aligned}-(2n+1) \int_{-1}^1 xp_n(x)p_{n-1}(x) dx + n \int_{-1}^1 p_{n-1}^2(x) dx &= 0 \\ n \int_{-1}^1 p_n^2(x) dx - (2n-1) \int_{-1}^1 xp_n(x)p_{n-1}(x) dx &= 0\end{aligned}$$

כלומר נקבל

$$\begin{aligned}(2n+1) \int_{-1}^1 xp_n p_{n-1} &= n \int_{-1}^1 p_{n-1}^2 \\ (2n-1) \int_{-1}^1 xp_n p_{n-1} &= n \int_{-1}^1 p_n^2\end{aligned}$$

נחלק את המשוואות ונקבל

$$(2n+1) \int_{-1}^1 p_n^2 = (2n-1) \int_{-1}^1 p_{n-1}^2$$

ומכאן ממשיכים באינדוקציה:

$$(2n-1) \int_{-1}^1 p_{n-1}^2 = (2n-3) \int_{-1}^1 p_{n-2}^2 = \dots = \int_{-1}^1 p_0^2 dx = 2$$

ומכאן

$$\int_{-1}^1 p_n^2 = \frac{2}{2n+1}$$

■

מנוסחת הרקורסיה, נקבל שעבור n זוגי, p_n מכיל רק חזקות זוגיות, ועבור n אי זוגי, p_n מכיל רק חזקות אי זוגיות. לכן

$$p_n(x) = (-1)^n p_n(-x)$$

כמו כן, מנוסחת הרקורסיה נקבל באינדוקציה כי

$$\begin{aligned} p_n(1) &= 1 \\ p_n(-1) &= (-1)^n \end{aligned}$$

משפט 1.3 הפולינומים $\{p_0(x), \dots, p_n(x)\}$ מהווים בסיס למרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר n .

■

הוכחה: הפולינומים אורתוגונליים, ולכן בלתי תלויים.

מסקנה 1.4 $p_n(x)$ אורתוגונלי לכל הפולינומים ממעלה לכל היותר $n-1$. בפרט, לכל אחד מבין $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$.

הוכחה: יהי $q_k(x)$ פולינום ממעלה $k < n$. מהמשפט הקודם, נכתוב אותו בתור

$$q_k(x) = \sum_{j=0}^k a_j p_j(x)$$

ולכן

$$\int_{-1}^1 q_k(x) p_n(x) dx = \sum_{j=0}^k a_j \int_{-1}^1 p_j(x) p_n(x) dx = 0$$

■

משפט 1.5 לפולינום $p_n(x)$ יש n שורשים פשוטים בקטע $(-1, 1)$.

הוכחה: נניח שיש לפולינום $p_n(x)$ k שורשים, שאינם בהכרח פשוטים, $x_1, \dots, x_k$, עם ריבויים $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. אזי $p_n(x)$ מחליף סימן בנקודות x_j שעבורן α_j אי זוגי. נגדיר

$$q(x) = \prod_{\alpha_j \text{ is odd}} (x - x_j)$$

כעת, המכפלה $p_n(x)q(x)$ לא מחליף סימן בקטע $(-1, 1)$, ולכן

$$\int_{-1}^1 p_n(x) q(x) dx \neq 0$$

ולכן נובע כי מעלת q היא לפחות n . מצד שני, מעלת q היא לכל היותר k , שהוא לכל היותר n . לכן נובע $k = n, \alpha_1, \dots, \alpha_n = 1$. ■