

אנליזה נומרית 1

© ארזים

11 ביוני 2017

1 אינטגרציה נומרית

מתאימים פולינום אינטרפולציה ומבצעים אינטגרל שלו. עבור $n = 1$ ראינו את כלל הטרפז, ועתה נראה את כלל סימפסון $n = 2$.

1.1 כלל סימפסון

ניקח שלוש נקודות $a = x_0, x_1, x_2 = b$ עם $x_2 - x_1 = x_1 - x_0 = h$. לוקחים את פולינום האינטרפולציה ומקרבים בעזרתו את האינטגרל. מחישוב ישיר מקבלים

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$$

זהו כלל סימפסון. כעת נחשב את השגיאה. נפתח טור טיילור:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{6}f^{(3)}(a) + \frac{(x-a)^4}{24}f^{(4)}(a) + \dots$$

את זה נציב בכלל שקיבלנו:

$$\begin{aligned} \int_a^{a+2h} f(x) dx &= 2hf(a) + 2h^3f'(a) + \frac{4}{3}h^3f''(a) + \frac{2}{3}h^4f^{(3)}(a) + \frac{16}{5}h^5f^{(4)}(a) + \dots \\ \frac{h}{3} (f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)) &= \frac{h}{3} \left(f(a) + 4f(a) + 4hf'(a) + 2h^2f''(a) + \frac{2}{3}h^3f^{(3)}(a) + \frac{1}{6}h^4f^{(4)}(a) \right) + \\ &\quad + \frac{h}{3} \left(f(a) + 2hf'(a) + 2h^2f''(a) + \frac{8}{3}h^3f^{(3)}(a) + \frac{2}{3}h^4f^{(4)}(a) \right) = \\ &= 2hf(a) + 2h^2f'(a) + \frac{4}{3}h^3f''(a) + \frac{2}{3}h^4f^{(4)}(a) + \frac{5}{18}h^5f^{(4)}(a) \end{aligned}$$

מהשוואת שני אלה נקבל כי השגיאה היא

$$-\frac{1}{90}h^5f^{(4)}(a) + \dots$$

כלומר $O(h^5)$. זה נקרא לעתים כלל "סימפסון שליש". הכחח מדויק לפולינום ממעלה לכל היותר 3, ולא מדויק לפולינומים ממעלה 4 ומעלה. יש כלל נוסף של סימפסון, עם ארבע נקודות, שלא משפר את השגיאה. לכן נישאר עם הכלל הזה.

1.2 כללי אינטגרציה מורכבים

נקרב את $f(x)$ על ידי פולינום אינטרפולציה למקוטעין, ומבצעים אינטגרציה בכל קטע. ראשית יש לנו את כלל הטרפז המורכב - לוקחים נקודות במרחק h , מעבירים קו בין כל שתיים סמוכות ומשתמשים בכלל הטרפז.

$$\begin{aligned}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx &\approx \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1})) \\ \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1})) = \\ &= h \left(f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right)\end{aligned}$$

כעת נחשב את השגיאה:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1})) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - \frac{h}{2} (f(x_{i+1}) + f(x_i)) \right) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^3}{12} f''(\xi_i)\end{aligned}$$

כעת, נוכל לכתוב

$$\min f'' \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) \leq \max f''$$

ולכן קיים ξ עם

$$f''(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)$$

ואז הגיאה תהיה

$$\frac{h^3}{12} n f''(\xi)$$

אבל כמובן $h = \frac{b-a}{n}$ ולכן

$$E = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$$

כעת נעבור לדבר על גרסה מורכבת של כלל סימפסון. כאן משתמשים בפולינום ריבועי למקוטעים, ובכל קטע משתמשים בקירוב סימפסון:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left(f(a) + 4 \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} f(x_{2j}) + 2 \sum_{j=1}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2j}) + f(b) \right) - \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$$

דוגמא מהו n המינימלי הדרוש כדי לקרב את $\int_0^3 e^{-x} dx$ בדיוק של 10^{-12} ?

פתרון נעבוד בשיטת הטרפז. גודל השגיאה הוא

$$|E| = \frac{b-a}{12} h^2 |f''(\xi)|$$

כאן $b-a=3$, $|f''(x)| = e^{-x} \leq 1$ מקבלים כאן

$$|E| \leq \frac{3}{12} h^2 \leq 10^{-12}$$

ומקבלים $h = 2 \cdot 10^{-6}$, כלומר $n = \frac{b-a}{h} > 1.5 \cdot 10^6$. כעת נעריך עם כלל סימפסון, שם

$$|E| = \frac{b-a}{180} h^4 |f^{(4)}(\xi)| \leq \frac{1}{60} h^4 < 10^{-12}$$

ואז $h < 10^{-3}$ ולכן $n > 1000$.

1.3 שגיאות עיגול

ראשית נדון בשיטת הטרפז. במקום לחשב את

$$T(h) = h \left(\frac{1}{2} f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2} f(x_n) \right)$$

אבל במקום זה מחשבים את

$$\tilde{T}(h) = h \left(\frac{1}{2} \tilde{f}(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{f}(x_i) + \frac{1}{2} \tilde{f}(x_n) \right)$$

נוכל לכתוב $\tilde{f}(x_i) = f(x_i)(1 - e(x_i))$, כאשר $|e(x_i)| \leq \varepsilon_M$. לכן

$$\begin{aligned} |T(h) - \tilde{T}(h)| &= \left| h \left(\frac{1}{2} (f(x_0) - \tilde{f}(x_0)) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) - \tilde{f}(x_i) + \frac{1}{2} (f(x_n) - \tilde{f}(x_n)) \right) \right| \leq \\ &\leq h \max |f| \varepsilon_M n = (b-a) \varepsilon_M \max |f| \end{aligned}$$

חסם זה לא תלוי בערך h (ולכן אפשר להקטין אותו כרצוננו בלי לקבל שגיאה).

1.4 אינטגרציית גאוס

כאן נדבר על אופן בחירת הנקודות x_i . בהינתן n , נבחר נקודות ומשקלים (x_i, w_i) כך שלביטוי

$$\sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

מעלת דיוק מקסימלית. הראינו שעבור

$$w_l = \int_a^b \prod_{j \neq l} \frac{x - x_j}{x_l - x_j}$$

מעלת הדיוק היא לפחות $n - 1$.

משפט 1.1 מעלת הדיוק של כלל אינטגרציה עם n נקודות היא לכל היותר $2n - 1$.

הוכחה: ניקח כלל אינטגרציה כלשהו

$$I = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$

ונתבונן בפולינום

$$g(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j)^2$$

מצד אחד, האינטגרל שלו חיובי ממש, ומצד שני, ההערכה שלנו תתאפס עליו כי הוא מתאפס בכל x_i . ■

כעת, נניח בלי הגבלת הכלליות כי קטע האינטגרציה הוא $[-1, 1]$, כלומר נחפש כללים מהצורה

$$\int_{-1}^1 g(t) dt = \sum_{i=1}^n w_i g(t_i)$$

מדוע?

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right) \frac{b-a}{2} dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 g(t) dt = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i g(t_i)$$

כעת, מעלת דיוק $2n - 1$ פירושה שרוצים לפתור את

$$\sum_{i=0}^n w_i x_i^j = \int_{-1}^1 x^j$$

לכל $1 \leq j \leq 2n - 1$. אלה $2n$ משוואות עם $2n$ נעלמים (הנקודות והמשקלות).

משפט 1.2 לכל $n > 1$ קיים כלל אינטגרציה מהצורה $\sum w_i f(x_i)$ עבור $\int_{-1}^1 f(x) dx$ ממעלת דיוק $2n - 1$. הנקודות $\{x_i\}$ הן השורשים של פולינום לז'נדר ממעלה n , והמשקולים הן

$$w_i = \int_{-1}^1 \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx$$

כלל אינטגרציה זה נקרא כלל אינטגרציית גאוס.

1.4.1 הפולינומים של לז'נדר

הפולינומים מוגדרים על ידי

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2 - 1)^n \right)$$

נרצה לחשב את מעלת הפולינום. האיבר המוביל בביטוי הפנימי הוא x^{2n} , ואם נגזור אותו n פעמים נקבל אכן מעלה n .

למה 1.3 $p_n(x)$ אורתוגונליים בקטע $[-1, 1]$, כלומר אם $m \neq n$ אזי

$$\int_{-1}^1 p_m(x) p_n(x) dx = 0$$