

אנליזה נומרית 1

© ארזים

8 ביוני 2017

1 אינטגרציה נומרית

אפשר לפתור בעזרת השיטות שנראה אינטגרלים בלי פונקצייה קדומה (שימושי למשל בהסתברות), או לקרב פונקציה כשיש רק דגימות. נחפש קירובים מהצורה

$$\int_a^b f(x) = \sum_i \omega_i f(x_i)$$

נניח שהנקודות x_i נתונות ושוות מרחק. נמצא פולינום אינטרפולציה עבור f ונבצע אינטגרציה שלו. נבנה

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x)$$

נקרב על ידי

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_n(x) dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \underbrace{\int_a^b l_i(x) dx}_{\omega_i}$$

מכאן נקבל

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b p_n(x) dx = \int_a^b f(x) - p_n(x) dx = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi(x)) \prod_{i=0}^n (x - x_i) dx$$

נוסחאות אינטגרציה שמבוססות על אינטרפולציית לגראנז' בנקודות שוות מרחק נקראות נוסחאות Newton-Cotes. אם קצות הקטע הם חלק מהנקודות הנוסחה נקראת סגורה, ואחרת היא נקראת פתוחה.

דוגמאות נתחיל באינטרפולציה לינארית ונראה את כלל הטרפז. כותבים

$$p_1(x) = f(a) \frac{x-b}{a-b} + f(b) \frac{x-a}{b-a}$$

נחשב את האינטגרל: זהו שטל של טרפז. נסמן $h = b - a$ ונקבל

$$\int_a^b f(x) \approx \int_a^b p_1(x) = (f(a) + f(b)) \frac{h}{2}$$

למה 1.1 (משפט ערך הביניים האינטגרלי) נניח כי $f \in C[a, b]$, $g(x) > 0$. אזי קיים נקודה $c \in [a, b]$ עם

$$\int_a^b f(x) g(x) = f(c) \int_a^b g(x)$$

הוכחה:

$$\min f \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq \max f \int_a^b g$$

■

ולכן המסקנה נובעת ממשפט ערך הביניים.

כעת נחשב את השגיאה בכלל הטרפז. ראינו כי

$$f(x) - p_1(x) = \frac{f''(\xi_x)}{2} (x-a)(x-b)$$

לכן מתקיים

$$f''(\xi_x) = 2 \frac{f(x) - p_1(x)}{(x-a)(x-b)}$$

ולכן זו פונקציה רציפה. מכאן

$$\int_a^b f(x) - p_1(x) = \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2} (x-a)(x-b)$$

בפנים יש לנו פונקציה רציפה כפול פונקצייה שלילית תמיד. נוציא מינוס ונשתמש בערך הביניים האינטגרלי:

$$\int_a^b f(x) - p_1(x) = -\frac{f''(\tilde{\xi})}{2} \int_a^b (x-a)(b-x)$$

נכתוב כעת $h = b - a$, $s = x - a$ ונקבל

$$\begin{aligned} -\frac{f''(\tilde{\xi})}{2} \int_0^h s(h-s) ds &= -\frac{f''(\tilde{\xi})}{2} \left(\frac{hs^2}{2} - \frac{s^3}{3} \right)_0^h = \\ &= -\frac{f''(\tilde{\xi})}{2} \left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3} \right) = -\frac{h^3}{12} f''(\tilde{\xi}) \end{aligned}$$

קיבלנו כלל עם דיוק h^3 . נשים לב שהוא מדויק לחלוטין לכל פולינום קבוע או לינארי, אבל לפולינומים ממעלה 2 ומעלה כבר לא.

הגדרה 1.2 מעלת הדיוק של כלל אינטגרציה היא n אם כלל האינטגרציה מדויק לכל הפולינומים ממעלה לכל היותר n , וקיים פולינום ממעלה $n+1$ שעבורו הכלל לא מדויק.

משפט 1.3 נתונות $n+1$ נקודות בקטע $[a, b]$, $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$. נתון כלל אינטגרציה עבור $\int_a^b f$ מהצורה

$$\sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i)$$

עבור

$$\omega_i = \int_a^b l_i(x) dx$$

עבור

$$l_i = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

אזי הכלל מדויק ממעלה לפחות n .

הוכחה: יהי p פולינום ממעלה n . מתקיים

$$p_n(x) \equiv \sum_{i=0}^n p_i(x) l_i(x)$$

בגלל יחידות פולינום האינטרפולציה. לכן

$$\int_a^b p(x) dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n p(x_i) l_i(x) dx = \sum_{i=0}^n p_i(x) \int_a^b l_i(x) dx = \sum_{i=0}^n \omega_i p(x_i)$$

■

ולכן סיימנו.

הערה 1.4 בכלל הטרפז ראינו שגיאה של $O(h^3)$, בעוד בגזירה ראינו שגיאה של $O(h)$. אינטגרציה זה קל יותר.