

אנליזה נומרית 1

© ארזים

4 ביוני 2017

1 גזירה נומרית

נרצה לקרב את הנגזרת של f על ידי הנקודות $(x_i, f(x_i))$. הגדרת הנגזרת אומרת:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

נקרב את זה:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ונרצה לבדוק את השגיאה בקירוב הזה, ואיך לבחור את h .

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(\xi)$$

כאשר $\xi \in [x_0, x_0 + h]$. אם כן,

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{h}{2} f''(\xi)$$

סכימה זו נקראת Forward Difference, והשגיאה בה היא

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right| \leq M \frac{h}{2}$$

שגיאה זו נקראת Truncation Error. יש גם את סכימת Backward Difference:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + \frac{h}{2} f''(\xi)$$

והשגיאה היא שוב $o(h)$.

דוגמה ניקח $f(x) = \ln x$ ונחשב את $f'(2)$.

$$h = 0.1 \Rightarrow \frac{\ln 2.1 - \ln 2}{0.1} = 0.4879$$

$$h = 0.01 \Rightarrow \frac{\ln 2.01 - \ln 2}{0.01} = 0.498$$

$$h = 0.001 \Rightarrow \frac{\ln 2.001 - \ln 2}{0.001} = 0.499875$$

נחשב את השגיאה:

$$|E| = |f''(\xi)| \frac{h}{2} = \frac{1}{\xi^2} \frac{h}{2} \leq \frac{h}{8}$$

וקיבלנו שהחסם הזה די הדוק, לפי התוצאות. אפשר להקטין את E ולקבל דיוק אפילו יותר טוב.

נרצה להגדיל את הדיוק בלי להקטין את h יתר על המידה. ניקח את $f(x_0)$, $f(x_0 + h)$, $f(x_0 - h)$ ונרצה לכתוב

$$Af(x_0 - h) + Bf(x_0) + Cf(x_0 + h) = f'(x_0) + o(h^2)$$

כאשר A, B, C קבועים.

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) - \frac{h^3}{6}f'''(\xi_1)$$

$$f(x_0) = f(x_0)$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^3}{6}f'''(\xi_2)$$

לכן נקבל

$$\begin{aligned} Af(x_0 + h) + Bf(x_0) + Cf(x_0 - h) &= (A + B + C)f(x_0) + (C - A)hf'(x_0) + \\ &+ (C + A)\frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^3}{6}(Cf'''(\xi_2) - Af'''(\xi_1)) \end{aligned}$$

נקבל שלוש משוואות:

$$A + B + C = 0$$

$$Ch - Ah = 1$$

$$C\frac{h^2}{2} + A\frac{h^2}{2} = 0$$

הפתרון הוא $A = -\frac{1}{2h}$, $C = \frac{1}{2h}$, $B = 0$. כלומר:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0) + \frac{h^2}{12}(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2))$$

כעת, נוכל לכתוב

$$\frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2} = f'''(\xi)$$

ממשפט ערך הביניים, ולכן

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + \frac{h^2}{6}f'''(\xi)$$

וסכימה זו נקראת Central Difference.

דוגמא נוכל לחזור לדוגמא הקודמת עם $f(x) = \ln x$. השגיאות שם עם FD, BD דומות, אבל עם CD היא קטנה משמעותית.

אפשר להכליל את השיטה, תוך שימוש בחמש נקודות, $f(x_0 - 2h), f(x_0 - h), f(x_0), f(x_0 + h), f(x_0 + 2h)$ נקבל

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h} (f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)) + \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi)$$

1.1 אקסטרפולציית ריצ'ארדסון

נרצה לשלב סכימות גזירה בעלות דיוק נמוך לקבלת סכימות גזירה בעלות דיוק גבוה.

דוגמה נגדיר

$$D(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

וראינו שמתקיים

$$D(h) = f'(x_0) + o(h^2)$$

נוכל לכתוב

$$f(x_0 + h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n$$

$$f(x_0 - h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n (-1)^n$$

ולכן

$$D(h) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n h^{2n}$$

כאשר למשל $c_0 = f'(x_0)$. כעת,

$$D(2h) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n 4^n h^{2n}$$

ולכן

$$4D(h) - D(2h) = 3f'(x_0) - 12c_2 h^4 \pm \dots$$

כלומר

$$\frac{4D(h) - D(2h)}{3} = f'(x_0) + o(h^4)$$

נפתח את הביטוי:

$$\begin{aligned}\frac{4D(h) - D(2h)}{3} &= \frac{1}{3} \left(8 \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{4h} - \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0 - 2h)}{4h} \right) + o(h^4) = \\ &= \frac{1}{12h} (f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)) + o(h^4)\end{aligned}$$

וזה בדיוק מה שקיבלנו קודם.

כעת, נתונה פונקציה F וביטוי שמקרב אותה $T(h)$. נניח שניתן לכתוב את שגיאת הקירוב בטור חזקות:

$$F - T(h) = c_1 h + c_2 h^2 + \dots$$

במקרה זה, $F - T(h) = o(h)$. כעת שוב

$$2T(h) - T(2h) = F + 2c_2 h^2 + \dots$$

1.1.1 שגיאות עיגול

בסכימת הפרש מרכזי קיבלנו

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + \frac{h^3}{6} f'''(\xi)$$

בגלל שגיאות עיגול נקבל

$$\frac{\tilde{f}(x_0 + h) - \tilde{f}(x_0 - h)}{2h}$$

וכן $\frac{\tilde{f} - f}{f} = e$ עבור $e = o(\varepsilon_M)$. נכתוב

$$\tilde{f}(x_0 \pm h) = f(x_0 \pm h) (1 + e(x_0 \pm h))$$

כעת נכתוב

$$\begin{aligned}|E(h)| &= \left| \frac{\tilde{f}(x_0 + h) - \tilde{f}(x_0 - h)}{2h} - f'(x_0) \right| = \left| \frac{f(x_0 + h)(1 + e(x_0 + h)) - f(x_0 - h)(1 + e(x_0 - h))}{2h} - f'(x_0) \right| \\ &= \left| \frac{f(x_0 + h)e(x_0 + h) - f(x_0 - h)e(x_0 - h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi) \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{f(x_0 + h)e(x_0 + h) - f(x_0 - h)e(x_0 - h)}{2h} \right| + \left| \frac{h^2}{6} f'''(\xi) \right| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{h} M_0 + \frac{h^2}{6} M_3\end{aligned}$$

עבור

$$M_i = \max_{x \in [x_0 - h, x_0 + h]} |f^{(i)}(x)|$$

קיבלנו חסם על השגיאה. נרצה למצוא לו מינימום לפי h :

$$\begin{aligned} E'(h) &= -\frac{\varepsilon M_0}{h^2} + \frac{h}{3} M_3 = 0 \\ \frac{h}{3} M_3 &= \frac{\varepsilon}{h^2} M_0 \\ h^3 &= \frac{3\varepsilon M_0}{M_3} \end{aligned}$$

וברור שנקודה זו היא מינימום - אין נקודת מקסימום (המקסימום אינסופי). הביטוי הזה נותן לנו את סדר הגודל של h . אנחנו צריכים $h \approx \sqrt[3]{\varepsilon}$ אם $\varepsilon = 10^{-16}$, נצטרך $h \approx 10^{-6}$. נסמן את אותו h אופטימלי בתור h_{opt} ונחשב:

$$E(h_{opt}) = \frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{\frac{3\varepsilon M_0}{M_3}}} + \frac{\left(\frac{3\varepsilon M_0}{M_3}\right)^{\frac{2}{3}}}{6} M_3 \approx \varepsilon^{\frac{2}{3}}$$

ולכן השגיאה הטובה ביותר לה נצפה היא בערך 10^{-10} .

1.2 שימוש בגזירה נומרית

נפתור את $u''(x) = g(x)$, כאשר $u(0) = A, u(1) = B$. נגדיר נקודות רשת: $h = \frac{1}{n}, x_j = jh$. נוסחת הקירוב נותנת לנו

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + o(h^2)$$

נסמן $u_j = u(x_j)$. נדרוש

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = g(x_j)$$

בתוך הקטע $[0, 1]$. קיבלנו מערכת משוואות, תלת אלכסונית - לכן אפשר לפתור אותה תוך $O(n)$ פעולות.