

אנליזה נומרית 1

© ארזים

1 ביוני 2017

1 פולינומי צ'בישב

ראינו בשיעור הקודם כי

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{\max_{x \in [-1, 1]} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} 2^{-n}$$

זה חסם על שגיאת האינטגרפוציה בקטע $[-1, 1]$ בנקודות צ'בישב. בקטע $[a, b]$ כללי נבחר את נקודות האינטגרפולציה להיות

$$z_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x_k$$

כאשר x_k נקודות צ'בישב. אם כן, נקבל

$$\begin{aligned} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)| &\leq \frac{\max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \max_{z \in [a, b]} \left| \prod_{k=0}^n (z - z_k) \right| = \\ &= \frac{\max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \max_{x \in [-1, 1]} \left| \prod_{k=0}^n \left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x - \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} x_k \right) \right| = \\ &= \frac{\max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \max_{x \in [-1, 1]} \left| \prod_{k=0}^n \left(\frac{b-a}{2} (x - x_k) \right) \right| = \\ &= \frac{\max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} 2^{-n} \left(\frac{b-a}{2} \right)^{n+1} \end{aligned}$$

דוגמה נקרב את $f(x) = \sin(x)$ בקטע $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ על ידי פולינום ממעלה 11. נשתמש בשורשים של $T_{12}(x)$ מועתקים לקטע $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. אז השגיאה היא לכל היותר

$$\frac{\max_{x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]} |f^{12}(x)|}{12!} 2^{-11} \left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2} \right)^{12} \approx 5.6 \cdot 10^{-14}$$

כעת, נמצא את הקירוב הטוב ביותר של x^n על ידי פולינום ממעלה $n-1$ לכל היותר בקטע $[-1, 1]$. ראינו כי

$$\max_{x \in [-1, 1]} \left| x^n - \underbrace{(a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x - a_0)}_{q_{n-1}(x)} \right| \geq \max_{x \in [-1, 1]} |2^{-n+1}T_n(x)| = 2^{-n+1}$$

נקבל שוויון כאשר $x^n - q_{n-1}(x) = 2^{-n+1}T_n(x)$ כלומר

$$q_{n-1}(x) = x^n - 2^{-n+1}T_n(x)$$

ואז מתקיים

$$\max_{x \in [-1, 1]} |x^n - q_{n-1}(x)| = 2^{-n+1}$$

כלומר x^n כמעט נפרש על ידי $1, x, \dots, x^{n-1}$. צריך בסיס אחר, טוב יותר - נראה בהמשך. נסמן $p_n(x)$ את פולינום האינטרפולציה של $f(x)$ ממעלה n בנקודות הנתונות על ידי השורשים של $T_{n+1}(x)$. נסמן $p_n^*(x)$ את פולינום המינימקס המוגדר על ידי

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - p_n^*(x)| \leq \max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - Q_n(x)|$$

לכל פולינום Q_n ממעלה לכל היותר n . נגדיר כעת

$$e_n^*(x) = p_n^*(x) - f(x), e_n(x) = p_n(x) - f(x)$$

וכן

$$h_n^* = \max_{x \in [-1, 1]} |e_n^*(x)|, h_n = \max_{x \in [-1, 1]} |e_n(x)|$$

ברור שמתקיים $h_n^* \leq h_n$.

משפט 1.1

$$\frac{h_n}{h_n^*} \leq 1 + \max_{x \in [-1, 1]} \sum_{j=0}^n |l_j(x)|$$

$l_j(x)$ הוא הפולינום ממעלה n שקיימים $\delta_{i,j}$ עבור $i, j = 0, \dots, n$ כאשר x_j הן נקודות האינטרפולציה עבור הפולינום $p_n(x)$.

הוכחה:

$$e_n^* - e_n = p_n^* - f - (p_n - f) = p_n^* - p_n$$

ולכן $e_n^* - e_n$ פולינום ממעלה לכל היותר n שמקיים $e_n^*(x_j) - e_n(x_j) = e_n^*(x_j)$ ולכן נקבל

$$e_n^*(x) - e_n(x) = \sum_{j=0}^n e_n^*(x_j) l_j(x)$$

ואז

$$\begin{aligned} |e_n(x)| &= \left| e_n^*(x) - \sum_{j=0}^n e_n^*(x_j) l_j(x) \right| \leq |e_n^*(x)| + \sum_{j=0}^n |e_n^*(x_j)| |l_j(x)| \leq \\ &\leq h_n^* + h_n^* \sum_{j=0}^n |l_j(x)| \end{aligned}$$

ניקח מקסימום על שני האגפים ונסיים

$$h_n \leq h_n^* \underbrace{\left(1 + \max_{x \in [-1,1]} \sum_{j=0}^n |l_j(x)| \right)}_{v_n}$$

■

מסתבר שעבור נקודות צ'בישב, לערך v_n יש ביטוי סגור: הנקודות הן

$$x_j = \cos \left(\frac{2j-1}{n+1} \frac{\pi}{2} \right)$$

כאשר $j = 1, \dots, n+1$ (שורשי $T_{n+1}(x)$). נקבל

$$v_n = 1 + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \tan \left(\frac{\left(i + \frac{1}{2}\right) \pi}{2(n+1)} \right)$$

משפט 1.2 תהי f פונקציה בקטע $[-1, 1]$. אזי השגיאה המתקבלת על ידי קירוב צ'בישב מסדר n (פונקצית האינטרפולציה בשורשים של $T_{n+1}(x)$) קטנה מאשר $4h_n^*$ עבור $n \leq 20$, וקטנה מאשר $5h_n^*$ עבור $n \leq 100$. עבור n גדול, מתקיים

$$v_n \sim \frac{2}{\pi} \ln n$$