

אנליזה נומרית 1

© ארזים

28 במאי 2017

1 אינטרפולציה בצורת ניוטון

נרצה לכתוב

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + q_n(x)$$

קיבלנו שמתקיים

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^n \left(a_j \prod_{k=0}^j (x - x_k) \right)$$

וסימנו

$$a_j = f[x_0, x_1, \dots, x_j]$$

משפט 1.1

$$\begin{aligned} f[x_0] &= f(x_0) \\ f[x_0, x_1] &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ f[x_0, x_1, \dots, x_k] &= \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \end{aligned}$$

הוכחה: באינדוקציה על k . עבור $k = 0, 1$ ראינו, ולכן נבצע את הצעד. נסמן p_{k-1} את פולינום האינטרפולציה בנקודות $x_0, \dots, x_{k-1}$, וכן q_{k-1} את פולינום האינטרפולציה עבור $x_1, \dots, x_k$ אזי

$$p_k(x) = \frac{x - x_0}{x_k - x_0} q_{k-1}(x) + \frac{x_k - x}{x_k - x_0} p_{k-1}(x)$$

נבדוק שמתקיים $p_k(x_i) = f(x_i)$ עבור $i = 0, \dots, k$:

$$\begin{aligned} p_k(x_0) &= p_{k-1}(x_0) = f(x_0) \\ p_k(x_k) &= q_{k-1}(x_k) = f(x_k) \\ p_k(x_i) &= \frac{x_i - x_0}{x_k - x_0} f(x_i) + \frac{x_k - x_i}{x_k - x_0} f(x_i) = \\ &= \frac{x_k - x_0}{x_k - x_0} f(x_i) = f(x_i) \end{aligned}$$

הנחת האינדוקציה אומרת שהמקדם של x^{k-1} בתוך p_{k-1} הוא $f[x_0, \dots, x_{k-1}]$ ובתוך q_{k-1} הוא $f[x_1, \dots, x_k]$, ולכן נקבל שהמקדם של x^k בתוך p^k הוא

$$\frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

■

כאשר מחשבים באמת, מחשבים ראשית את ההפרשים בנקודה אחת, ואז בשתיים, וכן הלאה.

"אה, לא אמרתי - המקדם $f[x_0, \dots, x_k]$ נקרא הפרש מחולק מסדר k . למה הפרש מחולק? כי הוא הפרש, והוא מחולק" - המרצה.

1.1 פולינומי צ'בישב

פלינום צ'בישב ממעלה n נתון על ידי

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

עבור $x \in [-1, 1]$.

משפט 1.2 $T_n(x)$ הוא פולינום ממעלה n וכן

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \end{aligned}$$

הוכחה: אנחנו נוכיח

$$\cos((n+1)\phi) + \cos((n-1)\phi) = 2\cos(\phi)\cos(n\phi)$$

"בתיכון בטח הוכחתם את זה כתרגיל נוראי באינדוקציה. אנחנו נפתור בצורה יפה יותר. מכירים מספרים מרוכבים?" - המרצה

ניזכר כי

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

ונקבל

$$\begin{aligned} \cos((n+1)\phi) + \cos((n-1)\phi) &= \frac{1}{2} \left(e^{i(n+1)\phi} + e^{-i(n+1)\phi} + e^{i(n-1)\phi} + e^{-i(n-1)\phi} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{in\phi} (e^{i\phi} + e^{-i\phi}) + e^{-in\phi} (e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \right) = \\ &= \frac{1}{2} (e^{in\phi} + e^{-in\phi}) (e^{i\phi} + e^{-i\phi}) = \\ &= 2 \cos(n\phi) \cos(\phi) \end{aligned}$$

כעת ניקח $\phi = \arccos(x)$ ונקבל

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\phi) &= 2 \underbrace{\cos(n\phi)}_{T_n(x)} \underbrace{\cos\phi}_x - \underbrace{\cos((n-1)\phi)}_{T_{n-1}(x)} = \\ &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \end{aligned}$$

■

ולכן נקבל את שרצינו.

תכונות

1. $|T_n(x)| \leq 1$ לכל $x \in [-1, 1]$

2. מנוסחת הרקורסיה נקבל

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \dots$$

3. נחפש נקודות קיצון:

$$T_n(x) = \pm 1 \iff n\phi = k\pi$$

עבור $\phi = \arccos(x)$ זה שקול לכך שמתקיים $\arccos(x) = \frac{k\pi}{n}$, כלומר

$$x = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

עבור $k = 0, 1, \dots, n$ לכך יש $n+1$ נקודות קיצון.

4. בין כל שתי נקודות קיצון יש שורש, ולכן יש לפחות n שורשים. זהו פולינום ממעלה n ולכן אלה כל השורשים. נחשב אותם:

$$T_n(x) = 0 \iff \cos(n\phi) = 0 \iff n\phi = \frac{\pi}{2}(2k-1) \iff$$

$$\iff \arccos(x) = \phi = \frac{2k-1}{n} \frac{\pi}{2} \iff$$

$$\iff x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{n} \frac{\pi}{2}\right)$$

עבור $k = 1, \dots, n$

5. נקבל

$$2^{-n}T_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k)$$

כאשר $x_0, \dots, x_n$ השורשים של T_{n+1} .

משפט 1.3 מבין כל הפולינומים $p_n(x)$, עבור $n \geq 1$, המעלה, שבהם המקדם של x^n הוא 1, לפולינום $f^n(x) = 2^{-(n-1)}T_n(x)$ יש את הערך המוחלט המקסימלי הקטן ביותר בקטע $[-1, 1]$. כלומר

$$\min_{p_n|a_n=1} \left\{ \max_{x \in [-1, 1]} p_n(x) \right\} = \max_{x \in [-1, 1]} |f^n(x)| = 2^{-(n-1)}$$

הוכחה: ראינו שהפולינום $f^n(x)$ מקבל את ערכי הקיצון $\pm 2^{-(n-1)}$ באותן $n+1$ נקודות של x_k בקטע $[-1, 1]$. נניח בשלילה שקיים פולינום p_n עם מקדם עליון $a_n = 1$ כך שמתקיים $|p_n(x)| < 2^{-(n-1)}$ לכל x בקטע. אזי

$$\begin{aligned} p_n(x_0) &< 2^{-(n-1)}T_n(x_0) = \frac{1}{2^{n-1}} \\ p_n(x_1) &> 2^{-(n-1)}T_n(x_1) = -\frac{1}{2^{n-1}} \\ p_n(x_2) &< 2^{-(n-1)}T_n(x_2) = \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

וכן הלאה. נגדיר כעת

$$Q(x) = p_n(x) - 2^{-(n-1)}T_n(x)$$

מתקיים

$$Q(x_0) < 0, Q(x_1) > 0, Q(x_2) < 0$$

ולכן Q מחליף סימן $n+1$ פעמים בקטע $[-1, 1]$, ולכן יש לו לפחות n שורשים. אבל Q פולינום ממעלה $n-1$, כי ביטלנו את המקדם העליון. לכן $Q=0$. ■

מכאן נקבל שאם נשתמש בשורשי $T_n(x)$ כנקודות לאינטרפולציה נקבל

$$\max_{[-1, 1]} |f(x) - p_n(x)| = \frac{2^{-n}}{n+1} \max_{[-1, 1]} |f^{(n+1)}(x)|$$