

אנליזה נומרית 1

© ארזים

21 במאי 2017

1 אינטרפולציה

נתונות לנו n זוגות של נקודות (x_i, y_i) , כאשר $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. איך נעריך את $f(x)$, עבור f כלשהי?

אנחנו מניחים $x \in [x_1, x_n]$.

משפט 1.1 (משפט וירשטראס, לא נוכח) תהי $f \in C[a, b]$, ויהי $\varepsilon > 0$. קיים פולינום $p(x)$ כך שלכל $x \in [a, b]$ מתקיים $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$.

משפט 1.2 נתונות $n+1$ נקודות שונות $x_0, \dots, x_n$, ונתונים הערכים $y_i = f(x_i)$. אזי קיים פולינום יחיד ממעלה לכל היותר n המקיים $p_n(x_i) = y_i$ לכל $0 \leq i \leq n$.

הוכחה: לשם ההוכחה נעזר בלמה.

למה 1.3 נתונים שני פולינום p_n, q_n ממעלה n בעלי אותו מקדם מוביל, המקיימים $p_n(x_i) = q_n(x_i)$ לכל $0 \leq i \leq n-1$. אזי $p_n(x) = q_n(x)$.

הוכחה: הפולינום $p_n - q_n$ הוא פולינום ממעלה לכל היותר $n-1$, אבל יש לו n שורשים - $x_0, \dots, x_{n-1}$. לכן $p_n(x) = q_n(x)$. ■

כעת, נסמן

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j x^j$$

אנו דורשים שיתקיים $p_n(x_i) = y_i$, משמע, בכתוב מטריוני:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

המטריצה הזו נקראת מטריצת ונדרמונדה, ונסמנה $V(x_0, \dots, x_n)$. נראה שמתקיים

$$\det V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{k < j} (x_j - x_k)$$

נתון שהנקודות x_i שונות, ולכן נקבל שהדטרמיננטה הזו לא מתאפסת, ולכן המטריצה הפיכה וקיים פתרון יחיד. נראה את הנוסחה שרצינו באינדוקציה. עבור $n = 1$ זה ברור:

$$\det V(x_0, x_1) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_0$$

נמשיך באינדוקציה. נחשב את $\det V(x_0, \dots, x_{n-1}, x)$. נפתח לפי השורה האחרונה ונקבל

$$\det V(x_0, \dots, x_{n-1}, x) = (-1)^{2n+2} x^n \det V(x_0, \dots, x_{n-1}) + q(x)$$

כאשר q פולינום ממעלה קטנה ממש מאשר n . הביטוי האחרון שקיבלנו הוא פולינום שמתאפס בנקודות $x_0, \dots, x_{n-1}$, ולכן הוא מזדהה עם הפולינום

$$\det V(x_0, \dots, x_{n-1}) (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

נשתמש בהנחת האינדוקציה ונקבל

$$\prod_{k < j} (x_j - x_k) \cdot \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$$

■

נשאר רק להציב $x_n = x$, ולסיים.

1.1 אינטרפולציית לגראנז'

נבנה פולינום שעובר דרך הנקודות (x_i, y_i) , בלי לפתור מערכת משוואות. נגדיר

$$L_k(x) = \prod_{k \neq i=0}^n (x - x_i)$$

הפולינום הזה מתאפס בנקודות x_i למעט בנקודה x_k , והוא ממעלה n . נגדיר

$$l_k(x) = \frac{L_k(x)}{L_k(x_k)} = \frac{\prod_{k \neq i=1}^n (x - x_i)}{\prod_{k \neq i=1}^n (x_k - x_i)}$$

פולינום זה מקיים $l_k(x_k) = 1$, ולכל $j \neq k$ הוא מקיים $l_k(x_j) = 0$. נגדיר לבסוף

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x)$$

וברור שבמצב זה מתקבל $p(x_i) = y_i$. פולינום זה הוא פולינום האינטרפולציה בצורת לגראנז'.

דוגמאות

- עבור $n = 0$, נתון (x_0, y_0) , וכמובן $p_0(x) = y_0$.
- עבור $n = 1$, נתונים $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$, ואז מקבלים את משוואת הישר

$$p_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

- אם נניח כי $y_0 = y_1$ בדוגמא הקודמת נקבל

$$p_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_0 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = y_0 \left(\frac{x - x_1 - x + x_0}{x_0 - x_1} \right) = y_0$$

- נתונה טבלה של ערכי e^x עבור $x = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1$. נקרב את $e^{0.37} = 1.44773$. עבור $n = 0$, נקרב על ידי

$$p_0(x) = e^{0.4}$$

השגיאה היא $E_0 = 0.044$. עבור $n = 1$, נשתמש בשתי הנקודות הקרובות ביותר:

$$p_1(x) = e^{0.3} \frac{x - 0.4}{0.3 - 0.4} + e^{0.4} \frac{x - 0.3}{0.4 - 0.3}$$

$$p_1(0.37) = 1.44923$$

והשגיאה היא $E_1 = 1.5 \cdot 10^{-3}$. האחרון שנראה יהיה עבור $n = 2$. ניקח את $0.3, 0.4, 0.5$:

$$p_2(x) = e^{0.3} \frac{(x - 0.4)(x - 0.5)}{(0.3 - 0.4)(0.3 - 0.5)} + e^{0.4} \frac{(x - 0.3)(x - 0.5)}{(0.4 - 0.3)(0.5 - 0.4)} + e^{0.5} \frac{(x - 0.3)(x - 0.4)}{(0.5 - 0.3)(0.5 - 0.4)}$$

$$p_2(0.37) = 1.44767$$

והשגיאה היא $E_2 = -6.74 \cdot 10^{-5}$.

משפט 1.4 יהיו $x_0, \dots, x_n$ נקודות שונות בקטע $[a, b]$. תהי $f \in C^{n+1}[a, b]$ ויהי $p_n(x)$ פולינום אינטרפולציה ממעלה לכל היותר n . אזי לכל $x \in [a, b]$ קיימת נקודה $\xi(x)$ המקיימת

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k)$$

הוכחה: ניקח $\tilde{x} \in [a, b]$ אם $\tilde{x} = x_k$, עבור k כלשהו, נסיים (המשוואה תתקיים לכל בחירה של ξ). נניח כי $\tilde{x} \neq x_k$ לכל k . נסמן

$$h(x) = f(x) - p_n(x) - (f(\tilde{x}) - p_n(\tilde{x})) \frac{\prod_{k \neq i=1}^n (x - x_i)}{\prod_{k \neq i=1}^n (\tilde{x} - x_i)}$$

נשים לב שפולינום זה מתאפס בנקודות $x_0, \dots, x_n$ וכן בנקודה $\tilde{x}$, כלומר $n+2$ נקודות. ממשפט רול, קיימת נקודה $\xi(\tilde{x})$ המקיימת $h^{(n+1)}(\xi(\tilde{x})) = 0$. נגזור ונקבל

$$h^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - (f(\tilde{x}) - p_n(\tilde{x})) \frac{(n+1)!}{\prod_{k \neq i=1}^n (\tilde{x} - x_k)}$$

כעת, על ידי הצבת ξ והעברת אגפים נקבל

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k)$$

■

מסקנה 1.5 קיבלנו חסם נקודתי

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{\max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \left| \prod_{k=0}^n (x - x_k) \right|$$

וחסם גלובלי

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{\max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \max_{a \leq x \leq b} \left| \prod_{k=0}^n (x - x_k) \right|$$

עובדה שלא נוכיח - אינטרפולציה בנקודות שוות מרחק אינה יציבה 0 טעויות קטנות בערכים $f(x_i)$ יובילו לטעויות גדולות בפולינום האינטרפולציה. ייתכן אפילו כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - p_n(x)| = \infty$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ למשל עבור}$$

דוגמא אינטרפולציה לינארית למקוטעים בנקודות שוות מרחק נניח שנתונות נקודות $x_0 = a, x_n = b, x_{k+1} - x_k = h$. נסמן $p_1(x)$ את פולינום האינטרפולציה הלינארי למקוטעין (כלומר בין כל שתי נקודות סמוכות מעבירים קו ישר). אזי

$$|f(x) - p_1(x)| \leq \frac{\max_{a \leq x \leq b} f''(x)}{2} |x - x_k| |x - x_{k-1}|$$

נמצא קיצון לפונקציה $r(x) = (x - x_k)(x - x_{k-1})$. נגזור:

$$r(x) = x^2 - (x_k + x_{k-1})x + x_k x_{k-1}$$

$$r'(x) = 2x - (x_k + x_{k-1})$$

נקבל שנקודת הקיצון היא באמצע הקטע, $\frac{x_k+x_{k-1}}{2}$, שהיא גם $x_{k-1} + \frac{h}{2}$. נציב:

$$|r(x)| = \left| x_{k-1} + \frac{h}{2} - x_k \right| \left| x_{k-1} + \frac{h}{2} - x_{k-1} \right| = \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{h^2}{4}$$

כלומר נקבל

$$\max_{a \leq x \leq b} \leq \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \frac{h^2}{8}$$

אם $n \rightarrow \infty$ נקבל $h \rightarrow 0$, ואז, אם הנגזרת השנייה חסומה (קטנה) נקבל שאיפה לאפס בקצב של h^2 .

1.2 אינטרפולצית ניוטון

נרצה להציג את פולינום האינטרפולציה כל שיהיה קל להוסיף נקודה חדשה. נכתוב

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + q_n(x)$$

כאשר $p_n(x)$ פולינום האינטרפולציה עבור $x_0, \dots, x_n$. $q_n(x)$ הוא פולינום ממעלה לכל היותר n , ואותו נרצה למצוא. נשים לב שלכל $1 \leq i \leq n-1$ נקבל

$$q_n(x) = p_n(x_i) - p_{n-1}(x_i) = 0$$

ועל כן הוא מזדהה עם הפולינום

$$q_n(x) = a_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

קיבלנו שמתקיים

$$\begin{aligned} p_n(x) &= p_{n-1}(x) + a_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \\ p_{n-1}(x) &= p_{n-2}(x) + a_{n-1}(x - x_0) \cdots (x - x_{n-2}) \\ &\vdots \\ p_1(x) &= p_0(x) + a_1(x - x_0) \\ p_0(x) &= a_0 \end{aligned}$$

לכן נקבל

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^n \left(a_j \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_k) \right)$$

נמצא נוסחה עבור a_j . מסמנים

$$a_j = f[x_0, \dots, x_j]$$

עבור $n=0$, מתקיים

$$p_0(x) = f(x_0) = a_0$$

עבור $n = 1$, נתונים $f(x_0), f(x_1)$ ואז

$$p_1(x) = f(x_0) + a_1(x - x_0)$$

$$p(x_1) = f(x_1) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0)$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$$

משפט 1.6 לכל n מתקיים

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$