

# אנליזה נומרית 1

© ארזים

18 במאי 2017

## 1 פירוק SVD

לכל מטריצה  $A$  מסדר  $m \times n$  קיים פירוק מהצורה  $A = U\Sigma V^T$  כאשר  $U, V$  אורתוגונליות,  $\Sigma$  אלכסונית.

נרצה לדון בקשר בין ערכים סינגולריים לערכים עצמיים.

**למה 1.1** הערכים הסינגולריים של  $A$  הם השורשים של הערכים העצמיים של  $A^T A$  ושל  $AA^T$ .

הוכחה: אם  $A = U\Sigma V^T$  אזי

$$AA^T = U\Sigma V^T (U\Sigma V^T)^T = U\Sigma V^T V \Sigma^T U^T = U\Sigma \Sigma^T U^T$$

■

### 1.1 תכונות קירוב של SVD

**למה 1.2** נסמן  $r$  את הדרגה של המטריצה,  $u_i$  את עמודות  $U$ ,  $v_i$  את עמודות  $V$ ,  $\sigma_i$  את הערכים הסינגולריים (אלכסון  $\Sigma$ ). אזי

$$A = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T$$

**משפט 1.3** נסמן

$$A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T$$

אזי

$$\min_{B \in M_{m,n}(\mathbb{R}), \text{rk}(B) \leq k} \|A - B\|_2 = \|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$$

הוכחה:

$$A - A_k = \sum_{i=k+1}^r \sigma_i u_i v_i^T$$

ולכן  $\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$ .  
 תהי  $B$  מטריצה עם  $\text{rk}(B) = k$ . לכן יש לה גרעים ממימד  $n - k$ . נכתוב  $\text{null}(B) = \text{span}\{w_1, \dots, w_{n-k}\}$ . משיקולי מימד,

$$\text{span}\{w_1, \dots, w_{n-k}\} \cap \text{span}\{v_1, \dots, v_{k+1}\} \neq \emptyset$$

לכן יהי ווקטור יחידה  $w$  מהחיתוך. אזי

$$w = \sum_{j=1}^{k+1} (v_j^T w) v_j$$

$$Aw = \sum_{j=1}^{k+1} (v_j^T w) \sigma_j u_j$$

על כן נקבל

$$\|A - B\|_2^2 \geq \|(A - B)w\|_2^2 = \|Aw\|_2^2 = \sum_{j=1}^{k+1} (v_j^T w)^2 \sigma_j^2 = \sigma_{k+1}^2 \sum_{j=1}^{k+1} (v_j^T w) = \sigma_{k+1}^2$$

■

וסיימנו.

ייצוג חסכוני של  $SVD$  הוא, כאשר  $A$  מסדר  $m \times n$  כאשר  $m \geq n$ , אזי נוכל לקחת  $U_1 = [u_1, \dots, u_n]$ ,  $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  ואז

$$A = U_1 \Sigma_1 V^T$$

## 1.2 יישומים של $SVD$

1. טווח, גרעין, דרגה (דרגה נומרית).

2. קירוב מטריצות.

3. הפיכת מטריצה:

$$A = U \Sigma V^T$$

$$A^{-1} = V \Sigma^{-1} U^T$$

4. פתרון של  $\min \|Ax - b\|_2$ .

**האלגוריתם** נתונה המטריצה  $A$  בגודל  $m \times n$ . נבנה את המטריצה  $B = \begin{pmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}$ . סימטרית בגודל  $(m+n) \times (m+n)$ . תהי  $Q$  המטריצה המלכסנת את  $B$ . אזי

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} V & V & 0 \\ U_1 & -U_1 & \sqrt{2}U_2 \end{pmatrix}$$

כאשר  $U_1$  היא  $n$  העמודות הראשונות של  $U$ ,  $U_2$  היא  $m-n$  העמודות האחרונות של  $U$ . כעת,

$$Q^T B Q = \begin{pmatrix} \Sigma & & \\ & -\Sigma & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

כתרגיל: הראו את זה.