

אנליזה נומרית 1

© ארזים

14 במאי 2017

1 איטרציות יעקובי

ראינו, בהינתן מטריצה מסדר 2 (סימטרית) איך ללכסן אותה אורתוגונלית בצעד אחד. השתמשנו בזה כדי להגדיר את המטריצות $Q^{(p,q)}$, שיעזרו לנו ללכסן אורתוגונלית את $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ סימטרית.

באיטרציה k , נבחר זוג אינדקסים (p, q) ונחשב את הזוג (c, s) שיאפס את האיבר $a_{p,q}$ של A_k . כלומר נחשב

$$A_{k+1} = Q^{(p,q)^T} A_k Q^{(p,q)}$$

A_k, A_{k+1} שונות רק בשורות ועמודות p, q , ולכן A_{k+1} ניתנת לחישוב מתוך A_k תוך $8n$ פעולות כפל ועוד $4n$ חיבורים, אם לא מתחשבים בסימטריה - כלומר $O(n)$.

האלגוריתם נגדיר $U = I_n, \varepsilon = \delta \|A\|_F$. נגדיר

$$off(A) = \sum_{i \neq j} |a_{i,j}|^2$$

כעת, כל עוד $off(A) > \varepsilon$, נבחר p, q עבורם $a_{p,q} = \max_{i \neq j} |a_{i,j}|$. נגדיר מחדש $A = Q^{(p,q)^T} A Q^{(p,q)}, U = U Q^{(p,q)}$, ונחזור על הלולאה.

למה 1.1 נורמת פרובניוס נשמרת תחת העתקות אורתוגונליות. כלומר, לכל שתי מטריצות אורתוגונליות Q, Z מתקיים $\|QAZ\|_F = \|A\|_F$.

הוכחה: נורמת 2 לוקטורים אינווריאנטית תחת העתקות אורתוגונליות. על כן נורמת 2 היא אינווריאנטית תחת העתקות אורתוגונליות גם כן למטריצות. כעת,

$$\begin{aligned} \|QAZ\|_F^2 &= \sum_i \|Q(AZ)_i\|_2^2 = \sum_i \|(AZ)_i\|_2^2 = \|AZ\|_F^2 = \\ &= \|Z^T A^T\|_F^2 = \|A^T\|_F^2 = \|A\|_F^2 \end{aligned}$$

■

כעת, נראה כי $off(A)$ קטן בכל איטרציה.

עבור $A_{k+1} = Q^{(p,q)^T} A_k Q^{(p,q)}$, נסמן את הכניסות של A_{k+1} בתור $b_{i,j}$ ואת של A_k בתור $a_{i,j}$ ונקבל

$$\begin{aligned} \text{off}(A_{k+1}) &= \sum_{i \neq j} b_{i,j}^2 = \sum_{i,j} b_{i,j}^2 - \sum_i b_{i,i}^2 = \|A_{k+1}\|_F^2 - \sum_i b_{i,i}^2 = \\ &= \|A_k\|_F^2 - \sum_i b_{i,i}^2 = \|A_{k+1}\|_F^2 - \sum_{i \neq p,q} a_{i,i}^2 - b_{p,p}^2 - b_{q,q}^2 = \\ &= \|A_k\|_F^2 - \sum_{i \neq p,q} a_{i,i}^2 - (a_{p,p}^2 + a_{q,q}^2 + 2a_{p,q}^2) = \\ &= \|A_k\|_F^2 - \sum_i a_{i,i}^2 - 2a_{p,q}^2 = \text{off}(A_k) - 2a_{p,q}^2 < \text{off}(A_k) \end{aligned}$$

2 פירוק SVD - Singular Value Decomposition

משפט 2.1 כל מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ניתנת לכתיבה בצורה $A = U \Sigma V^T$, כאשר A מסדר $m \times n$ אורתוגונלית, V מסדר $n \times n$ אורתוגונלית, Σ מסדר $m \times n$ עם ערכים אי שוויוניים על האלכסון הראשי, ואפס בכל מקום אחר. איברי האלכסון $\Sigma_{i,i}$ נקראים ערכים סינגולריים ומסומנים בתור σ_i .

הוכחה: נסמן $\|A\|_2 = \sigma_1$. יהיו u_1, v_1 שני וקטורי יחידה המקיימים $Av_1 = \sigma_1 u_1$. כדי למצוא וקטורים כאלה, נמצא וקטור יחידה שמביא למקסימום את $\|Ax\|_2$. נסמן $Av_1 = \mu u_1$, כאשר u_1 ווקטור יחידה, μ סקלר. אזי $\|Av_1\|_2 = \sigma_1$, כלומר

$$\sigma_1 = \|Av_1\| = \|\mu u_1\| = |\mu| \|u_1\| = |\mu|$$

נקבע את μ להיות σ_1 , ונהפוך את הסימן של u_1 אם צריך. נשלים את v_1 לבסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$, ואת u_1 לבסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^m$. נסמן U_1 את המטריצה שעמודותיה הן איברי הבסיס של $\mathbb{R}^m$ שבחרנו, V_1 את זו שעמודותיה ווקטורי הבסיס של $\mathbb{R}^n$ שבחרנו. אזי

$$\begin{aligned} S &= U_1^T A V_1 = U_1^T (\sigma_1 u_1, Av_2, \dots, Av_n) = \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_1 & w^T \\ 0 & B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כאשר w ווקטור, B מטריצה. נראה כי $w = 0$.

$$\left\| S \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ w \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \sigma_1 & w^T \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ w \end{pmatrix} \right\|_2 \geq \sigma_1^2 + w^T w = \sqrt{\sigma_1^2 + w^T w} \left\| \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ w \end{pmatrix} \right\|$$

כלומר, $\|S\|_2 \geq \sqrt{\sigma_1^2 + w^T w}$, אבל ברור כי $\|S\|_2 = \|A\|_2 = \sigma_1$, ומכאן $w = 0$. כעת, באינדוקציה, יהי $B = U_2 \Sigma_2 V_2^T$ פירוק SVD של B , ואז

$$A = U_1 S V_1^T = U_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_2^T \end{pmatrix} V_1^T$$

וזוהו פירוק SVD של A - נגדיר

$$U = U_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix}$$

$$V = V_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}$$

■

2.1 תכונות של SVD

למה 2.2 הדרגה של A היא מספר הערכים הסינגולריים השומים מאפס.

הוכחה:

$$\text{rk}(A) = \text{rk}(U\Sigma V^T) = \text{rk}(\Sigma V^T) = \text{rk}(\Sigma)$$

■

וזוה ברור.

למה 2.3 נניח $\text{rank}(A) = r$. אזי

$$\begin{aligned} \text{range}(A) &= \text{span}\{u_1, \dots, u_r\} \\ \text{null}(A) &= \text{span}\{v_{r+1}, \dots, v_n\} \end{aligned}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} y \in \text{range}(A) &\iff \exists x \ y = Ax \\ &\iff y = U\Sigma V^T x \\ &\iff y = U\Sigma z, z = V^T x \\ &\iff y = U(\sigma_1 z_1, \dots, \sigma_r z_r, 0, \dots, 0)^T \\ &\iff y = \sum_{i=1}^r (\sigma_i z_i) u_i \\ &\iff y \in \text{span}\{u_1, \dots, u_r\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \in \text{null}(A) &\iff \|Ax\|_2 = 0 \\
&\iff \|U\Sigma V^T x\|_2 = 0 \\
&\iff \|\Sigma V^T x\|_2 = 0 \\
&\iff \|\Sigma y\|_2 = 0, y = V^T x \\
&\iff y = (0, \dots, 0, y_{r+1}, \dots, y_n) \\
&\iff x = Vy = \sum_{i=1}^n y_i V_i \\
&\iff x \in \text{span}\{v_{r+1}, \dots, v_n\}
\end{aligned}$$

■

למה 2.4 $\|A\|_2 = \sigma_1$ (הערך הסינגולרי הגדול ביותר).

הוכחה:

$$\|A\|_2 = \|U\Sigma V^T\|_2 = \|\Sigma\|_2$$

■

זוה ברור.

למה 2.5 $\|A\|_F = \sqrt{\sum_i \sigma_i^2}$.

הוכחה:

$$\|A\|_F = \|U\Sigma V^T\|_F = \|\Sigma\|_F$$

■

זוה ברור.