

אנליזה נומרית 1

© ארזים

11 במאי 2017

1 מציאת ערכים עצמיים

התחלנו לדון בשיטת החזקה ההפוכה. נתונה מטריצה A עם ערכים עצמיים $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. נתון $\mu \in \mathbb{R}$. נחפש את הווקטור העצמי שמתאים לערך העצמי μ (או לערך העצמי הכי קרוב אל μ). הערכים העצמי של המטריצה $(A - \mu I)^{-1}$ הם $\frac{1}{\lambda_i - \mu}$. אם μ קרוב לערך עצמי λ_l , אזי $\frac{1}{\lambda_l - \mu}$ הרבה יותר גדול מאשר $\frac{1}{\lambda_j - \mu}$, כאשר $j \neq l$. אז, שיטת החזקה שראינו על המטריצה $(A - \mu I)^{-1}$ תתכנס מהר לווקטור u_l . האלגוריתם: נבחר $q^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ רנדומלי כך שמתקיים $\|q^{(0)}\|_2 = 1$. כעת, פעם אחר פעם, נפתור את

$$\begin{aligned}(A - \mu I) z^{(k)} &= q^{(k-1)} \\ q^{(k)} &= \frac{z^{(k)}}{\|z^{(k)}\|_2} \\ \lambda^{(k)} &= \left(q^{(k)}\right)^T A q^{(k)}\end{aligned}$$

מפרקים פעם אחת את $A - \mu I$ בפירוק LU , ואז כל איטרציה עולה $O(n^2)$. השגיאה באיטרציה k היא $O\left(\left|\frac{\lambda_l - \mu}{\lambda_j - \mu}\right|^k\right)$, כאשר λ_l הקרוב ביותר אל μ , λ_j השני הכי קרוב.

1.1 איטרציות יעקובי

רוצים למצוא את כל הערכים העצמיים של מטריצה A . נניח כי A סימטרית. רעיון נפעיל על סדרה של טרנספורמציות דמון אורתוגונליות $A_{k+1} \leftarrow Q_k^T A_k Q_k$, כאשר A_{k+1} "יותר אלכסונית" (עד שהאיברים מחוץ לאלכסון מספיק קטנים). נמצא מטריצות Q_k . נניח כי A היא בגודל 2×2 .

$$\begin{pmatrix} b_{pp} & b_{pq} \\ b_{qp} & b_{qq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_{pp} & a_{pq} \\ a_{qp} & a_{qq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$$
$$B = Q^T A Q$$

$$b_{pq} = b_{qp} = 0 \text{ נדרוש}$$

$$\begin{aligned} 0 = b_{qp} &= sca_{pp} - s^2 a_{pq} + c^2 a_{qp} - sca_{qq} = \\ &= sc(a_{pp} - a_{qq}) + a_{pq}(c^2 - s^2) \end{aligned}$$

כדי ללכסון את B צריל לפתור את זה. אם $a_{pq} = 0$ נבחר $c = 1, s = 0$. לכן נניח כי $q_{p,q} \neq 0$ ונקבל

$$c^2 - s^2 + (a_{pp} - a_{qq})sc = 0$$

$$\text{נגדיר } \tau = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}, t = \frac{s}{c}$$

$$c^2 - s^2 - 2\tau sc = 0$$

$$1 - \frac{s^2}{c^2} - 2\tau \frac{s}{c} = 0$$

$$t^2 + 2t\tau - 1 = 0$$

הפתרונות הם

$$t = -\tau \pm \sqrt{1 + \tau^2}$$

אם $\tau > 0$, נבחר את הפיתרון $+$, ואחרת את $-$ (כלומר את הקטן מבין שני הפתרונות בערך מוחלט). כדי לחשב את s, c נפתור את

$$t = \frac{s}{c}$$

$$s^2 + c^2 = 1$$

נקבל

$$c^2 = 1 - s^2 = 1 - t^2 c^2$$

$$c^2 = \frac{1}{1 + t^2}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$$

$$s = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$$

עבור מטריצה כללית, נגדיר $Q^{(p,q)}$ להיות מטריצה שעל האלכסון שלה תמיד יש 1 ובכל מקום אחר 0, פרט לארבעה תאים: בתא p, p נכתוב c , בתא p, q נכתוב s , בתא q, p נכתוב $-s$, ובתא q, q נכתוב c . המטריצה הזו, כשכופלים בה, משנה רק את השורות והעמודות p, q , בדיוק בצורה שראינו עבור 2×2 .

האלגוריתם: באיטרציה k , נבחר אינדקס p, q מחוץ לאלכסון, ונחשב את הזוג c, s שיאפס את האיבר p, q של A_k .

$$A_{k+1} = Q^{(p,q)^T} A_k Q^{(p,q)}$$