

אנליזה נומרית 1

© ארזים

4 במאי 2017

1 נורמות של מטריצות

הגדרה 1.1 יהי V מרחב ווקטורי, A אופרטור לינארי מעל V ושדה F נורמה $\|\cdot\|$ על V . נגדיר נורמה של A :

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

דוגמא תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$. הוכיחו כי

$$\|A\|_1 := \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_1 = \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{j,k}| =: M$$

הוכחה: בשלב ראשון, נראה כי $\|A\|_1 \leq M$. די להראות שלכל x עם $\|x\|_1 \leq 1$ מתקיים $\|Ax\|_1 \leq M$. נחשב:

$$\begin{aligned} \|Ax\|_1 &= \sum_{j=1}^n |(Ax)_j| = \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{j,k} x_k \right| \leq \sum_j \sum_k |a_{j,k} x_k| < \\ &= \sum_{k=1}^n |x_k| \sum_{j=1}^n |a_{j,k}| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| M = M \|x\|_1 \leq M \end{aligned}$$

בכיוון השני, M מוגדר כמקסימום, נבחר i_0 להיות האינדקס בו המקסימום הזה מושג. ניקח את e_{i_0} להיות הווקטור שהוא 0 בכל קואורדינטה, פרט לקואורדינטה i_0 , שם הוא 1. בבירור $\|e_{i_0}\|_1 = 1$, ומההגדרה, $\|Ae_{i_0}\|_1 = M$. לכן סיימנו. ■

תרגיל תהי A מטריצה ריבועית. הראו שקיימת Q אוניטרית (כלומר $Q^* := \overline{Q^T} = Q^{-1}$) שעבורה $Q^* A Q$ משולשית עליונה.

הוכחה: באינדוקציה על מימד המטריצה n . עבור $n = 1$, A סקלר, ואין מה לעשות. כעת נניח נכונות עד $n - 1$, ונוכיח עבור n .

למטריצה A יש ערך עצמי λ עם ווקטור עצמי u . נשלים לבסיס על ידי גרם שמידט, ונכתוב בעמודות של מטריצה: $U_n = (u, v_2, \dots, v_n)$. זו מטריצה אוניטרית, כי בלי הגבלת הכלליות, $\|u\| = 1$, וכן $\|v_j\| = 1$. מתוך כפל מטריצות, נקבל

$$U_n^* A U_n = U_n^* (\lambda u, A v_2, \dots, A v_n) = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}$$

A_{n-1} היא מסדר $n-1$, ולכן קיימת Q_{n-1} אוניטרית עבורה $Q_{n-1}^* A_{n-1} Q_{n-1}$ משולשית עליונה (מהנחת האינדוקציה). כעת נגדיר

$$Q_n = U_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_{n-1} \end{pmatrix}$$

■ אפשר לבדוק ולהיווכח שאכן $Q_n^* A Q_n$ משולשית עליונה.

הגדרה 1.2 עבור מטריצה A נגדיר רדיוס ספקטרלי של A להיות הערך המוחלט המקסימלי של ערך עצמי של A .

משפט 1.3 לכל A ריבועית ולכל $\varepsilon > 0$ קיימת נורמה על $\mathbb{C}^n$ כך שמתקיים

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$$

הוכחה: מהתרגיל הקודם קיימת Q אוניטרית עבורה $B = Q^* A Q$ משולשית עליונה. נשים לב שמתקיים $\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - B)$, כי הן דומות על ידי מטריצה אוניטרית. ולכן יש למטריצות A, B אותם ערכים עצמיים, ובפרט אותו רדיוס ספקטרלי. B משולשית עליונה, ועל כן ערכיה עצמיים הם $\lambda_j = b_{j,j}$. נגדיר כעת

$$b = \max_{1 \leq j \leq k \leq n} |b_{jk}|$$

את האיבר המקסימלי בערך מוחלט של B . נגדיר כעת

$$\delta = \min \left(1, \frac{\varepsilon}{(n-1)b} \right)$$

כעת נגדיר עוד מטריצה:

$$D = \text{diag}(1, \delta, \delta^2, \dots, \delta^{n-1})$$

מתקיים

$$D^{-1} = \text{diag}(1, \delta^{-1}, \delta^{-2}, \dots, \delta^{-n+1})$$

נגדיר עוד מטריצה $C = B^{-1}DB$. אפשר לכפול בידיים ולהיווכח:

$$C = \begin{pmatrix} b_{11} & \delta b_{12} & \delta^2 b_{13} & \dots & \delta^{n-1} b_{1n} \\ & b_{22} & \delta b_{23} & \dots & \delta^{n-2} b_{2n} \\ & & \ddots & \dots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

כעת, מתקיים

$$\|C\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |c_{ij}| \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left(|b_{jj}| + \sum_{i=j+1}^n \delta^{n-j} |b_{ji}| \right)$$

כעת נבצע הרבה אי שוויונות שכולם נובעים מכך שמתקיים $\delta \leq 1$. נקבל

$$\|C\|_{\infty} \leq \max_{1 \leq j \leq n} |b_{j,j}| + (n-1) \delta b \leq \rho(A) + \varepsilon$$

מסיימים על ידי כך שמגדירים $V = QC$, ואת הנורמה $\|x\| := \|V^{-1}x\|_{\infty}$. אז נותר להוכיח שלכל x עם $\|x\| \leq 1$ מתקיים $\|Ax\| \leq \rho(A) + \varepsilon$. ■