

אנליזה נומרית 1

© ארזים

27 באפריל 2017

1 אלגברה לינארית

1.1 מבוא

בהינתן מטריצה $A \in M_n(\mathbb{R})$, נרצה לפתור את $Ax = b$. ישנן כל מיני דרכים לפתור את הבעיה:

1. GEM - דירוג גאוס.

2. חישוב A^{-1} וכפל שני האגפים בה.

3. כלל קרמר.

ועוד ועוד. נרצה לפתור/לקרב פתרון בצורה יעילה. למשל, ראינו שכלל קרמר לא טוב לנו - הוא דורש המון חישובים, בערך $n(n+1)!$. משתמשים בפועל בשתי דרכים עיקריות:

1. פירוק יעיל ושימוש בו.

2. שיטות איטרטיביות (לא ניגע בקורס).

1.2 שיטת LU

בהינתן המערכת $Ax = b$, נפעיל דירוג גאוס עד שנגיע למערכת משולשית עליונה. נפתור אחורה - למציאת הפתרון. על הדרך נקבל הצגה

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \dots & 1 & 0 \\ * & * & \dots & * & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} & * & \dots & * & * \\ 0 & u_{2,2} & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{n-1,n-1} & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & u_{n,n} \end{pmatrix}$$

בהינתן הצגה זו נתרגם את המערכת $Ax = b$ אל $LUx = b$, ונפתור את שתי המערכות

$$Ly = b$$

$$Ux = y$$

תרגיל חימום: מצאו את פירוק LU של A ופתרו את המערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} (x) = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} \\ \frac{13}{12} \\ \frac{17}{60} \end{pmatrix}$$

פתרון ראשית נדרג: $m_{21} = \frac{1}{2}, m_{31} = \frac{1}{3}$

$$R_i \mapsto R_i - m_{i1}R_1$$

ונקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{45} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{31}{180} \end{pmatrix}$$

נמשיך עם $m_{32} = 1$, $R_3 \mapsto R_3 - R_2$ ונקבל את U :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{180} \end{pmatrix}$$

הפתרון כאן הוא $x = (1, 1, 1)^T$. הפירוק הוא

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} \end{pmatrix}$$

כעת, נרצה לדעת אם מידע נוסף על המטריצה יכול לתת לנו פירוק טוב יותר.

תרגיל תהי A מטריצה סימטרית ומוגדרת חיובית ממש - כלומר לכל $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ מתקיים $\langle Ax, x \rangle > 0$. הראו שקיימת מטריצה משולשית עליונה H עם

$$A = H^T H$$

הוכחה: נראה קיום באינדוקציה על n - מימד המטריצה. ניזכר שאם A_n סימטרית ומוגדרת חיובית ממש, אז גם כל מינור ראשי שלה (כלומר שמאלי עליון) הוא כזה. בסיס - $n = 1$, ברור.

נניח נכונות עד $n - 1$, ונוכיח עבור n . נכתוב

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & v \\ v^T & \alpha \end{pmatrix}$$

כעת, A_{n-1} סימטרית ומוגדרת חיובית ממש. לפי הנחת האינדוקציה, קיימת הצגה

$$A_{n-1} = H_{n-1}^T H_{n-1}$$

נרצה פירוק

$$A = H_n^T H_n = \begin{pmatrix} H_{n-1}^T & 0 \\ h^T & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{n-1} & h \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n-1} & H_{n-1}^T h \\ h^T H_{n-1} & h^T h + \beta^2 \end{pmatrix}$$

מכאן נקבל שני אילוצים:

$$\begin{aligned} H_{n-1}^T h &= v \\ h^T h + \beta^2 &= \alpha \end{aligned}$$

ראשית נשים לב שמתקיים $0 < \det A_{n-1} = \det H_{n-1}^T \det H_{n-1} = \det H_{n-1}^2$ בפרט, H_{n-1} הפיכה, ולכן נבחר

$$h = H_{n-1}^{-T} v$$

בפרט נקבל קיום של פירוק כזה מעל $\mathbb{C}$ בוודאות. נותר להשתכנע כי $\beta \in \mathbb{R}$. נחשב:

$$0 < \det A_n = \det H_n^2 = (\beta \det H_{n-1})^2 = \beta^2 \det A_{n-1}$$

לכן נקבל

$$\beta^2 > 0$$

■

מכאן נקבל כי $\beta \in \mathbb{R}$, וסיימנו.

תרגיל תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ בעלת מינורים ראשיים $A_i, 1 \leq i \leq n$, הפיכים. הראו שקיימות מטריצות (כל אחת יחידה) D אלכסונית, L משולשית תחתונה עם $L_{i,i} = 1$, M^T משולשית עליונה עם $(M^T)_{i,i} = 1$ כך שמתקיים

$$A = LDM^T$$

הוכחה: תחת תנאי השאלה קיים פירוק LU סטנדרטי. נגדיר

$$D = \text{diag}(u_{1,1}, u_{2,2}, \dots, u_{n,n}) = \begin{pmatrix} u_{1,1} & & \\ & \ddots & \\ & & u_{n,n} \end{pmatrix}$$

כעת, ברור שכל איברי האלכסון של D הפיכים, כי מכפלתם היא $\det A$. לכן נגדיר
ונקבל $D^{-1}U = M^T$

$$A = LDM^T$$

■

והיחידות נובעת מיחידות פירוק LU .

הערה 1.1 אם A סימטרית אזי $L = M$. אם בנוסף איברי האלכסון של D היו חיוביים, היינו מקבלים $A = H^T H$.

הערה 1.2 אם ידוע הפירוק $A = LDM^T$, נכתוב את המערכת $Ax = b$ בתור

$$Lz = b$$

$$Dy = z$$

$$M^T x = y$$

זה עולה $n^2 + n$ פעולות.