

אנליזה נומרית 1

© ארזים

30 במרץ 2017

1 שיטות לקירוב פתרונות של משוואות לא לינאריות

1.1 שיטת החצייה

אם הפונקציה f רציפה בקטע $[a, b]$, וכן $f(a)f(b) < 0$, אז יש ביניהן שורש. נסמן את מרכז הקטע x , ונבדוק את הסימן - נחליף את הנקודה מבין a, b שבה f בעלת אותו סימן כמו x בנקודה x עצמה, ונחזור על התהליך.

קריטריון עצירה אפשרי אפשר להגדיר $\varepsilon = \text{tol}$, ולעצור כאשר $|f(x_n)| < \varepsilon$. זה קריטריון בעייתי 0 ייתכן שהפונקציה משתנה לאט מאוד בסביבת השורש. כדי לתת טווח טעות (אי וודאות) למיקום השורש האמיתי r , נצטרך קריטריון המערב את f' . ראינו שאם r שורש פשוט של f , קריטריון כזה מתקבל על ידי

$$|x_n - r| \approx \frac{\delta}{|f'(r)|}$$

כאשר: נפתח בעזרת טיילור את f סביב הנקודה r על ידי פיתוח מסדר 1 עם שארית לגראנז':

$$|x_n - r| = \frac{|\tilde{f}(x_n) + \delta(x_n)|}{|f'(\xi)|}$$

כאשר ξ בין x_n לבין r , $\tilde{f}(x_n)$ הוא הייצוג של $f(x_n)$ במחשב, $\delta(x_n)$ שגיאת עיגול - לכל היותר דיוק מכונה למשל.

דוגמא נקה

$$f(x) = (x-2)x + 1$$

יש שורש כפול בנקודה $x = 1$. ניקח $\tilde{x} = 1 + \varepsilon$ ונקבל כי

$$f(1 + \varepsilon) = \varepsilon^2$$

נניח שעובדים עם 8 ספרות. אז עבור

$$|\varepsilon| < \frac{1}{\sqrt{2}} 10^{-4}$$

אזי $\tilde{f}(1+\varepsilon) = 0$ קיבלנו שהקירוב שלנו טוב לבערך 4 ספרות. מה הקריטריון שמתקבל

$$|x_n - r| \approx \left(\frac{2\frac{1}{2}10^{-8}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 0.707 \cdot 10^{-4}$$

הגדרה 1.1 שיטה נומרית $x_n \rightarrow r$ מתכנסת מסדר α אם

$$0 < \lim \frac{|x_{n+1} - r|}{|x_n - r|^\alpha} = M < \infty$$

מגדירים $x_n - r = e_n$.

תרגיל נניח כי $f(r) = 0$ כאשר $f'(r), f''(r) > 0$, $f \in C^2$ בסביבת r . הראו כי שיטת False Position מתכנסת לינארית.

פתרון $f \in C^2$, ולכן בלי הגבלת הכלליות $f'' > 0$ בקטע התחלתי $[a, b]$. בגלל קמירות, הנקודה הימנית לא תשתנה באף איטרציה. האיטרציות הן

$$x_n = a_n - f(a_n) \frac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)}$$

נציב:

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} - f(x_{n-1}) \frac{b - x_{n-1}}{f(b) - f(x_{n-1})} \\ e_n &= e_{n-1} - f(x_{n-1}) \frac{b - x_{n-1}}{f(b) - f(x_{n-1})} \\ \frac{e_n}{e_{n-1}} &= 1 - \frac{f(x_{n-1}) - f(r)}{x_{n-1} - r} \cdot \frac{b - r - e_{n-1}}{f(b) - f(r + e_{n-1})} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e_n}{e_{n-1}} \right| &= \left| 1 - f'(r) \frac{b - r}{f(b) - f(r)} \right| \end{aligned}$$

נותר לנו להראות

$$f'(r) \frac{b - r}{f(b) - f(r)} \neq 1$$

נפתח טיילור:

$$\frac{f(b) - f(r)}{b - r} = \frac{f'(r)(b - r) + \frac{1}{2}f''(\xi)(b - r)}{b - r}$$

לכן בגבול נקבל

$$\frac{f'(r)}{f'(r) + \underbrace{\frac{1}{2} f''(\xi)}_{>0} (b-r)} \neq 1$$

לכן סיימנו.

1.2 שיטות נקודת שבת

מוטיבציה נרצה לפתור את $f(r) = 0$. נתרגם לבעיה שקולה מהצורה $g(r) = r$. כעת, אם g חלקה מספיק בסביבת r , וכן g מכווצת, כלומר בסביבת r יש $\beta < 1$ המקיים

$$|g(x) - g(y)| \leq \beta |x - y|$$

אזי ממשפט העתקה המכווצת, קיימת נקודת שבת יחידה בסביבה.