

אנליזה נומרית 1

© ארזים

29 ביוני 2017

1 שאלות ברמת בחינה

תרגיל תהי $\{x_\nu\}$ סדרת נקודות בתוך $\mathbb{R}$ המתכנס אל x . נניח שלכל $\nu \in \mathbb{N}$ מתקיים $x_\nu \neq x$, וכן

$$\begin{aligned}x_{\nu+1} - x &= (\xi_\nu + q)(x_\nu - x) \\ |q| &< 1 \\ \lim_{\nu \rightarrow \infty} \xi_\nu &= 0\end{aligned}$$

נגדיר

$$y_\nu = x_\nu - \frac{(x_{\nu+1} - x_\nu)^2}{x_{\nu+2} - 2x_{\nu+1} + x_\nu}$$

הראו כי y_ν מוגדר היטב וכל כי

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{y_\nu - x}{x_\nu - x} = 0$$

כיצד ניתן להשתמש בטענה זו עבור שיטות איטרטיביות.

פתרון הטענה מאפשרת להאיץ התכנסות של שיטה איטרטיבית על ידי בניית y_ν . נראה מוגדרות היטב:

$$\begin{aligned}x_{\nu+2} - 2x_{\nu+1} + x_\nu &= (x_{\nu+2} - x) - 2(x_{\nu+1} - x) + (x_\nu - x) = \\ &= (\xi_{\nu+1} + q)(x_{\nu+1} - x) - 2(\xi_\nu + q)(x_\nu - x) + (x_\nu - x) = \\ &= \underbrace{(x_\nu - x)}_{\neq 0} \underbrace{((\xi_{\nu+1} + q)(\xi_\nu + q) - 2(\xi_\nu + q) + 1)}_{\xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} q^2 - 2q + 1 = (q-1)^2 \neq 0}\end{aligned}$$

לכן יש ν_0 כל שלכל $\nu \geq \nu_0$ המכנה לא מתאפס. נבדוק את הגבול המבוקש:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{y_\nu - x}{x_\nu - x} = 0$$

נכתוב

$$y_\nu = x_\nu - \frac{(x_{\nu+1} - x_\nu)^2}{x_{\nu+2} - 2x_{\nu+1} + x_\nu}$$

אם כן

$$y_\nu - x = (x_\nu - x) - \frac{(x_{\nu+1} - x_\nu)^2}{x_{\nu+2} - 2x_{\nu+1} + x_\nu}$$

נותר להראות

$$\frac{y_\nu - x}{x_\nu - x} = 1 - \frac{1}{x_\nu - x} \frac{(x_{\nu+1} - x_\nu)^2}{x_{\nu+2} - 2x_{\nu+1} + x_\nu} \rightarrow 0$$

נראה שהגורם הימני שואף לאחד.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_\nu - x} \frac{(x_{\nu+1} - x_\nu)^2}{x_{\nu+2} - 2x_{\nu+1} + x_\nu} &= \frac{1}{(x_\nu - x)^2} \frac{((x_{\nu+1} - x) - (x_\nu - x))^2}{((\xi_{\nu+1} + q)(\xi_\nu + q) - 2(\xi_\nu + q) + 1)} = \\ &= \frac{1}{(x_\nu - x)^2} \frac{(x_\nu - x)^2 (q + \xi_\nu - 1)^2}{((\xi_{\nu+1} + q)(\xi_\nu + q) - 2(\xi_\nu + q) + 1)} \rightarrow \frac{(q-1)^2}{(q-1)^2} = 1 \end{aligned}$$

וסיימנו.

תרגיל תהי

$$f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$$

עבור $a_m \neq 0$, ויהיו $x_0, \dots, x_n$ נקודות שונות.

1. הראו שאם $n = m$ אזי $f[x_0, \dots, x_n] = a_n$.
2. הוכיחו שאם $n < m$ אזי $f[x_0, \dots, x_n, x]$ הוא פולינום ממעלה $m - n - 1$ בכל קטע פתוח בין נקודות דגימה עוקבות.

פתרון

1. נשים לב שבמצב זה, יש לנו $n + 1$ נקודות דגימה לפולינום f ממעלה n . לכן, מהמשפט על אינטרפולציה, f היא פולינום האינטרפולציה של עצמה בנקודות הללו. $f[x_0, \dots, x_n]$ הוא המקדם המוביל של פולינום האינטרפולציה, a_n הוא המקדם המוביל של f , ולכן הוכחנו שוויון.

2. נכתוב

$$f(x) - p(x) = f[x_0, \dots, x_n, x](x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

מהגדרה נקבל $f[x_0, \dots, x_n, x]$ פולינום, ומעלתו חייבת להיות $m - n - 1$ (אחרי העברת אגפים וספירת מעלות).

תרגיל תהי f גזירה ברציפות 4 פעמים. נניח כי

$$f(1.0) = 2.7183$$

$$f(0.8) = 2.2255$$

$$\int_{0.8}^1 f(x) dx = 0.4927$$

מצאו נוסחת גזירה נומרית עבור $f'(1)$ שצורתה

$$f'(a) = \frac{3f(a) - 4f(a-h) + f(a-2h)}{2h} + o(h^2)$$

פתרון נרצה לקחת $a = 1, h = 0.1$ - אבל אין לנו את $f(0.9)$. נחלץ ביטוי מקורב מהנתון על האינטגרל. נשתמש באינטגרציה נומרית - כלל סימפסון.

$$\int_{a-2h}^a f(x) dx = \frac{h}{3} (f(a) + 4f(a-h) + f(a-2h)) - f^{(4)}(\eta) \frac{h^5}{90}$$

ואכן נקבל

$$4f(a-h) = \frac{3}{h} \int_{a-2h}^a f(x) dx - f(a) - f(a-2h) + \frac{3}{h} \frac{f^{(4)}(\eta)}{90} h^5$$

נציב בגזירה הנומרית:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{3f(a) - \left(\frac{3}{h} \int_{a-2h}^a f(x) dx - f(a) - f(a-2h) + O(h^4) \right) + f(a-2h)}{2h} + O(h^2) = \\ &= \frac{4f(a) - \frac{3}{h} \int_{a-2h}^a f(x) dx + 2f(a-2h)}{2h} + \underbrace{O(h^3) + O(h^2)}_{O(h^2)} \end{aligned}$$

קיבלנו נוסחה מהצורה שרצינו, כשאנחנו יכולים לחשב את החלק השמאלי - הכל שם נתון לי.