

אנליזה נומרית 1

© ארזים

22 ביוני 2017

1 אינטגרציה נומרית ופולינומים אורתוגונליים

נרצה לקרב אינטגרל

$$\int_a^b f(x) \omega(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

הדרך לעשות זאת: נגדיר מרחב מכפלה פנימית $L_2^\omega[a, b]$ עם מכפלה פנימית

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) \omega(x) dx$$

לוקחים בסיס כלשהו של פולינומים, למשל $\{1, x, x^2, \dots\}$ ועושים גרם-שמידט. נקודות הדגימה $x_0, \dots, x_n$ הן השורשים של p_{n+1} . הדיוק האלגברי הוא $2n+1$.

תרגיל הראו שלפולינום P_n יש בדיוק n שורשים פשוטים בקטע (a, b) .

פתרון פורמלית - באינדוקציה. יהי p_n עבור $n \geq 1$. ראשית, נטען שיש לו שורש כלשהו בקטע (a, b) . אחרת, p_n היה שומר סימן בקטע $[a, b]$. אם כך,

$$0 = \int_a^b p_n(x) \omega(x) dx = \langle p_n, 1 \rangle$$

מצד שני, בלי הגבלת הכלליות $p_n > 0$ בקטע, ונקבל

$$\int_a^b p_n(x) \omega(x) dx > 0$$

בסתירה. נוציא את השורש ונכתוב $p_n(x) = (x - x_0)^k q(x)$. נראה שבהכרח $k = 1$. נניח כי $k \geq 2$. אם הוא זוגי, אזי

$$0 = \int_a^b p_n(x) q(x) \omega(x) dx = \int_a^b (x - x_0)^k q^2(x) \omega(x) dx > 0$$

ולכן k לא זוגי. כעת ניקח את

$$\int_a^b p_n(x) q(x) (x - x_0) \omega(x) dx$$

וטיעון זה יעבוד (בגלל שהנחנו $k > 1$, ולכן $\deg(q(x)(x - x_0)) < n$). עד כה הראינו $p_n(x) = (x - x_0) q(x)$, כאשר $q(x_0) \neq 0$. אם $n = 1$ סיימנו, כי q קבוע. אחרת, $n \geq 2$, ונראה שיש עוד שורש $x_1 \neq x_0$ - אחרת q שומרת סימן (בלי הגבלת הכלליות חיובית). נקבל

$$0 = \int_a^b p_n(x) (x - x_0) \omega(x) dx = \int_a^b q(x) (x - x_0)^2 \omega(x) dx > 0$$

ולכן יש עוד שורש. נמשיך כך עד לקבלת n שורשים.

תרגיל (מבחינה) יהי $[a, b]$ קטע, ותהי $\omega(x)$ פונקציית משקל עליו. יהיו $\{p_n(x)\}$ משפחה של פולינומים אורתוגונליים ביחס אליה. נגדיר $x_0, \dots, x_n$ את השורשים של p_{n+1} . נגדיר מטריצה

$$M = \begin{pmatrix} p_0(x_0) & \dots & p_0(x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_n(x_0) & \dots & p_n(x_n) \end{pmatrix}$$

הראו כי M הפיכה וחשבו הופכית.

פתרון יש לנו נוסחת אינטגרציה גאוס:

$$\sum_{k=0}^n A_k f(x_k) \approx \int_a^b f(x) \omega(x) dx$$

זו בעלת דיוק אלגברי $2n + 1$. נגדיר

$$N = \text{diag}(A_0, \dots, A_n) M^T = \begin{pmatrix} A_0 p_0(x_0) & \dots & A_0 p_n(x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n p_0(x_0) & \dots & A_n p_n(x_n) \end{pmatrix}$$

נראה כי $NM = I_{n+1}$. נחשב:

$$(NM)_{i,j} = \langle R_i(M), C_j(N) \rangle = \sum_{k=0}^n p_i(x_k) A_k p_j(x_k) = \sum_{k=0}^n A_k (p_i p_j)(x_k)$$

מהדיוק האלגברי נקבל

$$(NM)_{i,j} = \int_a^b \omega(x) p_i(x) p_j(x) dx = \delta_{i,j}$$

תרגיל נתונה נוסחת אינטגרציה נומרית

$$\int_a^b f(x) \omega(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

נניח כי f רציפה בקטע $[a, b]$. הראו כי נוסחת האינטגרציה מתכנסת לאינטגרל האנליטי עבור $n \rightarrow \infty$.

פתרון נשתמש בטענת עזר - משפט ויירשטראס. הוא אומר שקיימת סדרת פולינומים $\{R_k\}$ עם $R_k \xrightarrow{u} f$ בקטע $[a, b]$. ראשית נוכיח כי $A_k > 0$ לכל k . יהי p_n הפולינום האורתוגונלי שמעלתו n , ונגדיר

$$p(x) = \frac{p_n(x)}{x - x_k}$$

אזי $\deg p = n - 1$, וכן $\deg p^2 = 2n - 2$, שזה פחות מהדיוק האלגברי. נציב בנוסחת האינטגרציה:

$$0 < \int_a^b p^2(x) \omega(x) dx = \sum_{j=1}^n A_j p^2(x_j) = A_k p^2(x_k)$$

ומכאן $A_k > 0$. בנוסף, נשים לב שהערך $\sum_{j=1}^n A_j$ אינו תלוי בערך n , שכן הוא נוסחת האינטגרציה של $f = 1$, שעליה אנחנו מדויקים. כעת, יהי $\varepsilon > 0$, ויהי P פולינום כל שלכל $x \in [a, b]$ מתקיים

$$|f(x) - p(x)| < \frac{\varepsilon}{c}$$

עבור

$$c = 2 \int_a^b \omega(x) dx = 2 \sum_{j=1}^n A_j$$

פולינום כזה מובטח לנו ממשפט ויירשטראס. נניח כעת כי $\deg p \geq 2n - 1$. עבור n שכזה, נוסחת האינטגרציה הנומרית מדויקת על p , ואז

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \omega(x) dx - \sum_{j=1}^n A_j f(x_j) \right| &= \left| \int_a^b f(x) \omega(x) dx - \int_a^b p(x) \omega(x) dx + \sum_{j=1}^n A_j p(x_j) - \sum_{j=1}^n A_j f(x_j) \right| \leq \\ &\leq \left| \int_a^b (f(x) - p(x)) \omega(x) dx \right| + \left| \sum_{j=1}^n A_j (p(x_j) - f(x_j)) \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f(x) - p(x)| \omega(x) dx + \sum_{j=1}^n A_j |p(x_j) - f(x_j)| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{c} \int_a^b \omega(x) dx + \frac{\varepsilon}{c} \sum_{j=1}^n A_j = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$