

אנליזה נומרית 1

© ארזים

18 ביוני 2017

1 אינטגרציה נומרית

יש לנו $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן, ואנחנו מגדירים

$$I(f) = \int_a^b f(x) \, dx$$

הערך הזה עלול להיות קשה לחישוב, ולכן נחפש קירוב:

$$I(f) \approx NI(f)$$

$$NI(f) = \sum_{j=0}^n A_j f(x_j) = \langle A, f \rangle$$

עבור $a \leq x_0 \leq \dots \leq x_n \leq b$

שיטות

1. דיוק אלגברי (ראינו בהרצאה).

2. פולינום אינטרפולציה (נראה עכשיו).

1.1 פולינום אינטרפולציה

יהי $P_n(x)$ פולינום האינטרפולציה בנקודה $x_0 < \dots < x_n$. אזי

$$f(x) = p_n(x) + e(x)$$

כאשר

$$e(x) = f[x_0, \dots, x_n, x] \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

ולכן

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b p_n(x) \, dx + \int_a^b f[x_0, \dots, x_n] \underbrace{\prod_{j=0}^n (x - x_j)}_{\psi_n} \, dx$$

נקבל את הקירוב

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \int_a^b p_n(x) \, dx$$

נציג את p_n בצורת לגראנז' ונקבל

$$\int_a^b p_n(x) \, dx = \sum_{j=0}^n \left(\underbrace{\int_a^b L_j(x) \, dx}_{A_j} \right) f(x_j)$$

מה שמעניין אותנו כאן זו השגיאה:

$$E_{int} = \int_a^b f[x_0, \dots, x_n, x] \psi_n(x) \, dx$$

תרגיל נניח כי ψ_n שומרת סימן בקטע $[a, b]$. הראו כי עבור $f \in C^{n+1}$ מתקיים

$$|E_{int}| \leq \frac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)!} \sup_{\xi \in [a, b]} |f^{(n+1)}(\xi)|$$

בנוסף, מה ניתן לומר על הדיוק האלגברי?

פתרון $f \in C^{n+1}$, ולכן $g(x) = f[x_0, \dots, x_n, x]$ רציפה בקטע $[a, b]$. ψ_n שומרת סימן, ולכן נוכל להפעיל את משפט ערך הביניים האינטגרלי: קיימת $c \in [a, b]$ עם

$$E_{int} = f[x_0, \dots, x_n, c] \int_a^b \psi_n(x) \, dx$$

כעת

$$f[x_0, \dots, x_n, c] = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}$$

עבור $\alpha \in [a, b]$ כלשהו. לכן

$$|E_{int}| \leq \frac{|f^{(n+1)}(\alpha)|}{(n+1)!} \int_a^b |\psi_n(x)| \, dx \leq \frac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)!} \sup_{\xi \in [a, b]} |f^{(n+1)}(\xi)|$$

וסיימנו

הערה 1.1 נניח כי $f \in C^\infty$ והנגזרות של f חסומות במידה אחידה על $[a, b]$ על ידי $M > 0$. אזי

$$|E_{int}| \leq \frac{M(b-a)^{n+2}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

הערה 1.2 אם $b = a + h$ נקבל $|E_{int}| \leq C \cdot h^{n+2}$, וכאשר $h \rightarrow 0$ השגיאה היא $O(h^{n+2})$.

תרגיל נניח כי $f \in C^{n+2}$, וכן

$$\int_a^b \psi_n(x) \, dx = 0$$

כמו כן, נניח שיש נקודה x_{n+1} שעבורה $\psi_n(x)(x - x_{n+1})$ שומרת סימן בקטע. אזי

$$|E_{int}| \leq \frac{(b-a)^{n+3}}{(n+2)!} \sup_{\xi \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)|$$

תרגיל

$$E_{int} = \int_a^b f[x_0, \dots, x_n, x] \psi_n(x) \, dx$$

נסתכל על ההפרש המחוק. אם הנקודות שונות (נניח את זה), אזי $f[x_0, \dots, x_n, x_{n+1}, x]$ לא תלוי בסדר הנקודות. כעת,

$$f[x_0, \dots, x_n, x_{n+1}, x] = f[x_{n+1}, x_0, \dots, x_n, x] = \frac{f[x_0, \dots, x_n, x] - f[x_0, \dots, x_n, x_{n+1}]}{x - x_{n+1}}$$

$$f[x_0, \dots, x_n, x] = (x - x_{n+1}) f[x_0, \dots, x_n, x_{n+1}, x] + f[x_0, \dots, x_n, x_{n+1}]$$

נכפול את שני האגפים פי ψ_n וניקח אינטגרל. נקבל

$$E_{int} = \int_a^b f[x_0, \dots, x_n, x_{n+1}, x] \psi_n(x) (x - x_{n+1}) \, dx$$

מכאן נמשיך כמו בתרגיל הקודם כדי לקבל את הנדרש.

דוגמא כלל נקודת האמצע: $P_0(x) = f(x_0)$, כאשר $x_0 = \frac{a+b}{2}$. הקירוב הוא

$$\int_a^b P_0(x) \, dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

השגיאה היא

$$E_{int} \int_a^b f[x_0, x] (x - x_0) \, dx$$

אפשר לוודא כי

$$\int_a^b (x - x_0) \, dx = 0$$

תרגיל הראו שנוסחת אינטגרציה

$$\int_a^b f(x) \, dx = \sum_{j=0}^n A_j f(x_j)$$

לא יכולה להיות בעלת דיוק אלגברי גבוה מאשר $2n + 1$.

פתרון נגדיר

$$Q(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)^2$$

פולינום ממעלה $2n + 2$, שהכלל שלנו יאפס את האינטגרל שלו, אבל הוא אי שלילי ויש נקודה שבה הוא חיובי, ולכן האינטגרל שלו חיובי.