

# אנליזה נומרית 1

© ארזים

8 ביוני 2017

## 1 שגיאה באינטרפולציה

תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ויהיו  $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$  נקודות בקטע. קיים ויחיד פולינום ממעלה לכל היותר  $n$  עבורו לכל  $i$  מתקיים

$$f(x_i) = p(x_i)$$

**תרגיל** בקטע  $[0, 1]$  נסתכל על  $f(x) = e^{2x}$ . ניקח נקודות דגימה המסודרות בצורה אחידה על פני הקטע, כלומר

$$x_j = \frac{j}{n}$$

יהי  $p_n$  פולינום האינטרפולציה המבוסס על נקודות אלו. הראו כי  $p_n \rightarrow f$  במידה שווה.

**פתרון** נזכיר שהשגיאה באינטרפולציה היא

$$|e(x)| = |f(x) - p(x)|$$

שאפשר לכתוב אותה על ידי

$$e(x) = f[x_0, \dots, x_n, x](x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

נסביר זאת: נבחר  $x'$ . נניח שזו נקודת דגימה ונבנה פולינום אינטרפולציה חדש,  $p_1$ , על  $\{x_1, \dots, x_n, x'\}$  אזי

$$p_1(x) = p(x) + f[x_0, \dots, x_n, x'](x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

בשוויון זה נציב  $x'$  ונעביר אגפים ונקבל את מה שרצינו. בנוסף, ראינו שאם  $f \in C^n[a, b]$

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

כאשר  $\xi \in [\min x_i, \max x_i]$  עבור  $f(x) = e^{2x}$  בקטע  $[0, 1]$  נקבל

$$|e(x)| = |f(x_0, \dots, x_n, x)(x - x_0) \dots (x - x_n)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x - x_0| \dots |x - x_n| \leq \sup_{\xi \in [0, 1]} \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \leq \frac{2^{n+1}e^2}{(n+1)!} \rightarrow 0$$

ולכן בפרט גם נכון על הסופרימום (קיבלנו חסם שלא תלוי בנקודה  $x$ ), ולכן קיבלנו התכנסות במידה שווה, כמו שרצינו.

## 2 גזירה נומרית

בהינתן נקודה  $\tilde{x}$  ונקודות סמוכות  $x_1, \dots, x_n$ , נרצה לקרב את  $f'(\tilde{x})$  על ידי

$$f'(\tilde{x}) \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

יש שלוש שיטות - טור טיילור, דיוק אלגברי, ופולינום אופייני. אנחנו ראינו בשיעור את שיטת טיילור.

**תרגיל** מצאו נוסחת גזירה נומרית המקרבת את  $f''(x_0)$  באמצעות ערכי  $f$  בנקודות  $x_0, x_0 - h, x_0 + h$ .

**פתרון** משתמש בדיוק אלגברי - נמצא את המקדמים כך שהנוסחא מדויקת על פולינומים ככל האפשר יש לנו בסיס למרחב הפולינום  $\{1, x, x^2, \dots\}$ . יש לנו שלוש נקודות ולכן נקבל שלוש משוואות, עבור  $f = 1, x, x^2$ :

$$0 = A + B + C$$

$$0 = A(x_0 - h) + Bx_0 + C(x_0 + h)$$

$$2 = A(x_0 - h)^2 + Bx_0^2 + C(x_0 + h)^2$$

קיבלנו מערכת ממימד 3, ואותה פותרים ומקבלים

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 - h) + 2f(x_0) + f(x_0 + h)}{h^2}$$

נעבור לשיטת פולינום האינטרפולציה. נכתוב

$$f(x) = p(x) + e(x)$$

$$f'(x) = p'(x) + e'(x)$$

**שאלה** למה הקירוב שלנו הוא מהצורה

$$p'(x) = \sum A_i f(x_i)$$

**תשובה** בגלל צורת לגראנז',

$$p(x) = \sum L_i(x) f(x_i)$$

$$L'_i(x) = A_i$$

**תרגיל** הראו שמתקבלת אותה נוסחת גזירה כמו הנוסחה שקיבלנו משיקולי דיוק אלגברי.

**פתרון** נניח שקיבלנו נוסחת גזירה

$$f'(x) \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

משיקולי דיוק אלגברי. מהבנייה, היות ויש לנו  $n+1$  פרמטרים, אנחנו מדוייקים לכל פולינום ממעלה לכל היותר  $n$ . בפרט אנחנו מדוייקים עבור בסיס לגראנז', כלומר

$$L'_j(x) = \sum_{i=0}^n A_i L_j(x_i) = A_j$$

וסיימנו.