

אנליזה נומרית 1

© ארזים

1 ביוני 2017

1 אינטגרפולציה

הבעיה שלנו היא כזו: בהינתן פונקציה $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ואוסף של $n + 1$ נקודות $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$ נרצה למצוא פולינום ממעלה n לכל היותר שמסכים עם f בכל הנקודות x_i .

משפט 1.1 קיים ויחיד פולינום כזה.

■ **הוכחה:** ראינו בשיעור - בונים מערכת לינארית עם מטריצת ון דר מונד.

1.1 צורת לגראנז'

החיסרון במערכת עם ון דר מונד היא שהעלות לפתרון היא $O(n^3)$. נראה כעת דרך נוספת: נבחר את בסיס לגראנז'

$$L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

התכונה החשובה היא $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$. נעיר שזה בסיס כי יש $n + 1$ פולינומים כאלה, והם בלתי תלויים לינארית, בגלל שאם

$$\sum \mu_j L_j(x) = 0$$

נציב x_j ונקבל

$$\mu_j = 0$$

נרצה כעת להציג

$$p(x) = \sum_{i=0}^n c_i L_i(x)$$

אם נציב x_j נקבל

$$f(x_j) = p(x_j) = c_j$$

ולכן בסך הכל

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x)$$

תרגיל הוכיחו כי לכל $n \geq 1$ ולכל $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$ מתקיים

$$\sum_{i=0}^n L_i(x) = 1$$

פתרון נגדיר פולינום/פונקציית עזר $f(x) = 1$. מצד אחד, האינטרפולציה שלה היא

$$\sum_{i=0}^n L_i(x)$$

אבל היא גם פולינום ממעלה 0, ויש לנו נקודה 1 לפחות, ולכן פולינום האינטרפולציה שלה הוא היא עצמה. לכן קיבלנו

$$1 = \sum_{i=0}^n L_i(x)$$

תרגיל נגדיר את שגיאת האינטרפולציה

$$e(x) = f(x) - p(x)$$

הראו שניתן לכתוב

$$e(x) = \sum_{i=0}^n (f(x) - f(x_i)) L_i(x)$$

פתרון נכתוב

$$\begin{aligned} e(x) &= f(x) - p(x) = \\ &= \sum_{i=0}^n f(x) L_i(x) - \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) = \\ &= \sum_{i=0}^n (f(x) - f(x_i)) L_i(x) \end{aligned}$$

תרגיל נניח שהפונקציה זוגית, מספר הנקודות זוגי, והן ממוקמות באופן סימטרי סביב הראשית. הראו כי $p(x)$ פולינום זוגי.

פתרון נכתוב

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=1}^n f(x_k) L_k(x) + \sum_{k=-n}^{-1} f(x_k) L_k(x) = \\ &= \sum_{k=1}^n f(x_k) L_k(x) + f(-x_k) L_{-k}(x) = \\ &= \sum_{k=1}^n f(x_k) (L_k(x) + L_{-k}(x)) \end{aligned}$$

יש להוכיח רק עבור k כלשהו זוגיות של $L_k(x) + L_{-k}(x)$. נכתוב

$$L_k(-x) = \prod_{j \neq k} \frac{(-x - x_j)}{(-x_k - x_j)} = \prod_{j \neq k} \frac{-(x - x_j)}{-(x_k - x_j)} = \prod_{j \neq k} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} = L_{-k}(x)$$

לכן נקבל

$$L_k(-x) + L_{-k}(-x) = L_{-k}(x) + L_k(x)$$

וזו זוגיות בדיוק כמו שרצינו.

1.2 צורת ניוטון

צורת לגראנז' לא נוחה לחישובים. נעבוד עם בסיס ניוטון

$$1, x - x_0, \dots, \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j)$$

ואז צורת ניוטון היא

$$p(x) = \sum_{i=0}^n \left(f[x_0, \dots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right)$$

המקדמים נקראים הפרשים מחלוקים. מתקיים $f[x_0] = f(x_0)$ ואז

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

ואז אפשר לבנות אותם רקורסיבית בטבלה.

תרגיל הראו כי מתקיים

$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\varphi'_{n+1}(x_i)}$$

כאשר

$$\varphi_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

פתרון נגדיר

$$\psi_j(x) = \prod_{i \neq j} (x - x_i)$$

מכלל לייבניץ נקבל

$$\varphi'_{n+1}(x) = \sum_{j=0}^n \psi_j(x)$$

ובפרט

$$\varphi'_{n+1}(x_i) = \sum_{j=0}^n \psi_j(x_i) = \psi_i(x_i)$$

וזהו המכנה בפולינום $L_i(x)$. כעת, מצד אחד, $f[x_0, \dots, x_n]$ הוא המקדם של החזקה המובילה בפולינום האינטרפולציה (מצורת ניוטון). מהצד השני, מצורת לגראנז', המקדם של החזקה המובילה בפולינום האינטרפולציה הוא

$$\sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\varphi'_{n+1}(x_i)}$$

ולכן סיימנו.