

סדרות מקו"ק

$$\dots \rightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \rightarrow \dots$$

כיוון: M_i מודול R , f_i הומו- R

סדרה סובית:

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \dots \rightarrow M_n \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

נאמר שסדרה מקו"ק במקום ה- i (א.ב. M_i),
 $\text{Im } f_i = \text{Ker } f_{i+1}$

נאמר שסדרה מקו"ק אם ב"א מקו"ק במקום ה- i לכל i :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & \rightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \rightarrow & 0 \\ & & & & & & & & & & \text{הסדרה} \\ & & & & & & & & & & \text{הסדרה} \\ & & & & & & & & & & \text{הסדרה} \\ & & & & & & & & & & \text{הסדרה} \end{array}$$

אם $f_i = g \circ h$, $f_i = g \circ h$, $f_i = g \circ h$

סדרה מקו"ק מעולם האחרון נראית סדרה מקו"ק

כל סדרה מקו"ק אפשרי עברה לסדרות מקו"ק קצרות
 $N_i = \text{Im}(f_i) = \text{Ker}(f_{i+1})$

$$0 \rightarrow N_i \rightarrow M_i \rightarrow N_{i+1} \rightarrow 0$$

לענין: $0 \rightarrow M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \rightarrow 0$ סדרה של מודולים R

אם הסדרה מקו"ק $\Leftrightarrow$ סדרה מודול R , N הסדרה

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\bar{v}} \text{Hom}(M, N) \xrightarrow{\bar{u}} \text{Hom}(M', N)$$

מקו"ק, כאשר:

$$\bar{v}(\varphi) = \varphi \circ v$$

$$\bar{u}(\varphi) = \varphi \circ u$$

(2) הסדרה $0 \rightarrow M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \rightarrow 0$ מקו"ק $\Leftrightarrow$ סדרה מודול R , M

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, N') \xrightarrow{\bar{\alpha}} \text{Hom}(M, N) \xrightarrow{\bar{\beta}} \text{Hom}(M, N'')$$

מקו"ק, כאשר:

$$\bar{\alpha}(\varphi) = \alpha \circ \varphi$$

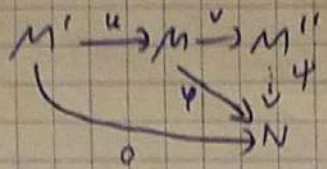
$$\bar{\beta}(\varphi)$$

$\varphi(v(x)) = 0 \iff \forall x \in M, \varphi(v(x)) = 0 \iff \varphi = 0$
 $\nabla \varphi = 0 \iff \varphi = 0$

השאלה נוספת: שאלת גורם:

$\text{Im}(u) = \ker v$, $\text{Im}(v) = \ker(u)$

$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M''$



$N = M'', \varphi = \text{id}$

$\varphi(u(x)) = \varphi(0) \implies \varphi(x) = 0 \implies x \in \ker(u)$

$\text{Im } v \subseteq \ker u$

$\psi: M'' \rightarrow N$

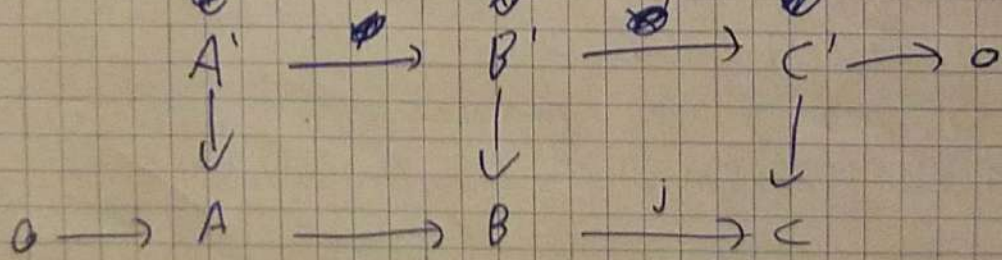
$\psi(v(x)) = \psi(0) \implies \psi(x) = 0 \implies x \in \text{Im}(u)$

השאלה נוספת: שאלת גורם:

$\text{Hom}(M, N) \cong N$

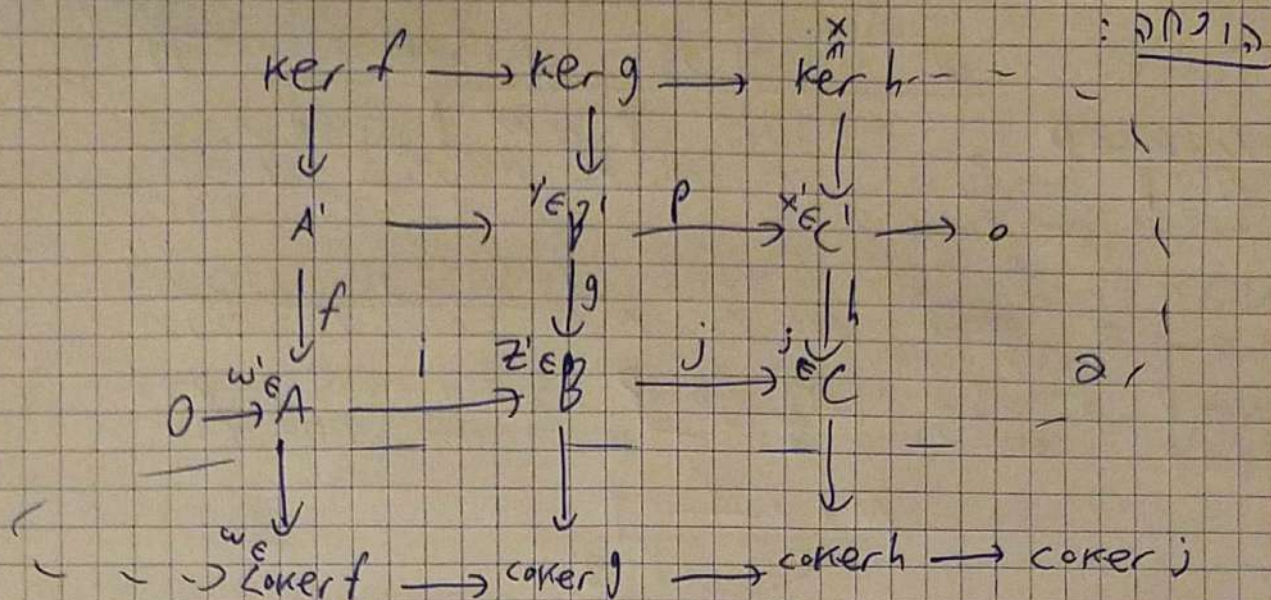
השאלה נוספת: שאלת גורם:

$\text{Im } f \xrightarrow{g} \text{Im } g \xrightarrow{h} \text{Im } h \xrightarrow{j} \text{Im } j$



$\ker f \rightarrow \ker g \rightarrow \ker h \rightarrow \text{coker } f \rightarrow \text{coker } g \rightarrow \text{coker } h \rightarrow \text{coker } j$

$\ker f \rightarrow \ker g \rightarrow \ker h \rightarrow \text{coker } f \rightarrow \text{coker } g \rightarrow \text{coker } h \rightarrow \text{coker } j$



$\ker f \rightarrow \ker g \rightarrow \ker h$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $A' \xrightarrow{p} B' \xrightarrow{h} C'$
 $\downarrow f \quad \downarrow g \quad \downarrow h$
 $0 \xrightarrow{w'} A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $\text{coker } f \rightarrow \text{coker } g \rightarrow \text{coker } h$

$\ker h \cap \ker g = \ker f$
 $x \in \ker h \cap \ker g \Rightarrow x \in \ker f$
 $\text{coker } f \rightarrow \text{coker } g \rightarrow \text{coker } h$
 $\text{coker } f \rightarrow \text{coker } g \rightarrow \text{coker } h$

Diagram Chasing

R -mod $\mathcal{C} \subseteq R$ -mod $\mathcal{C}$

$$\lambda: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$(\lambda(m) \in \mathbb{Z})$$

λ is a linear map from $\mathcal{C}$ to $\mathbb{Z}$

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

$$\lambda(B) = \lambda(A) + \lambda(C)$$

$$\lambda = \dim$$

$$0 \rightarrow M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_n \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow N_1 \rightarrow M_1 \rightarrow N_{i+1} \rightarrow 0$$

$$\lambda(M_i) = \lambda(N_i) + \lambda(N_{i+1})$$

הצגה: $(x, y) \in M \times N$ $- \cup$ $M \otimes N \ni x \otimes y = 0$ $- \cup$ $x \in M_0 \subseteq M$ $y \in N_0 \subseteq N$ $- \cup$ $x \otimes y = 0$ $- \cup$ $M_0 \otimes N_0$

דוגמה: $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. $M \otimes N = 0$ כי $1 \otimes 2 = 0$ $N_0 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $0 \neq 1 \otimes 2 \in M \otimes N_0$ כי $N = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \neq 0$

לעניין: $x_i \in M$, $y_i \in N$ כך ש: $\sum x_i \otimes y_i = 0$ $M \otimes N \ni \sum x_i \otimes y_i = 0$ $- \cup$ M_0, N_0 $\sum x_i \otimes y_i = 0$ $- \cup$ $M_0 \otimes N_0 \ni \sum x_i \otimes y_i = 0$

הוכחה: $\sum x_i \otimes y_i = 0$ $- \cup$ $\sum (x_i, y_i) = D \Rightarrow \sum (x_i, y_i) = D$ $- \cup$ $\sum (x_i, y_i) = D$ $- \cup$ $\sum (x_i, y_i) = D$

הוא $\sum (x_i, y_i) = D$ $- \cup$ $\sum (x_i, y_i) = D$ $- \cup$ $\sum (x_i, y_i) = D$ $- \cup$ $\sum (x_i, y_i) = D$ $- \cup$ $\sum (x_i, y_i) = D$

את $\sum (x_i, y_i) = D$ $- \cup$ $\sum (x_i, y_i) = D$ $- \cup$ $\sum (x_i, y_i) = D$ $- \cup$ $\sum (x_i, y_i) = D$ $- \cup$ $\sum (x_i, y_i) = D$ $- \cup$ $\sum (x_i, y_i) = D$

דוגמה: R $- \cup$ V $- \cup$ $V \otimes_R R \cong V$ $- \cup$ $V \otimes_R R \cong V$ $- \cup$ $V \otimes_R R \cong V$ $- \cup$ $V \otimes_R R \cong V$ $- \cup$ $V \otimes_R R \cong V$

$V \otimes_R R \cong V$ $- \cup$ $V \otimes_R R \cong V$ $- \cup$ $V \otimes_R R \cong V$ $- \cup$ $V \otimes_R R \cong V$ $- \cup$ $V \otimes_R R \cong V$

קטגוריה $M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N$

$M \otimes N \rightarrow M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N \rightarrow M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N \rightarrow M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N \rightarrow M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N \rightarrow M \otimes N$

$M \otimes N \rightarrow M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N \rightarrow M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N \rightarrow M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N \rightarrow M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N \rightarrow M \otimes N$

המקרה $M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N$

$M \otimes N \rightarrow M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N \rightarrow M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N \rightarrow M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N \rightarrow M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N \rightarrow M \otimes N$

הוכחה: $M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N$

כיון ש: $M \otimes N \rightarrow M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N \rightarrow M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N \rightarrow M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N \rightarrow M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N \rightarrow M \otimes N$

$M \otimes N \rightarrow M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N \rightarrow M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N \rightarrow M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N \rightarrow M \otimes N$ $- \cup$ $M \otimes N \rightarrow M \otimes N$

Prop. 1, $S(m \otimes n) = m \otimes Sn$: S -SPIN $M \otimes N$ 31c

2100

$(m \otimes n) \otimes p \rightarrow m \otimes (n \otimes p)$

מכאן נוסחת:

$$f \otimes g: M \otimes N \rightarrow M' \otimes N'$$

$$m \otimes n \longrightarrow f(m) \otimes g(n)$$

(2) 700 800 900

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{f} & M' & \xrightarrow{f'} & M'' \\ N & \xrightarrow{g} & N' & \xrightarrow{g'} & N'' \end{array}$$

$$M \otimes N \xrightarrow{f \otimes g} M' \otimes N' \xrightarrow{f' \otimes g'} M'' \otimes N'' \quad : s/c$$

$$(f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$$

כחומר, גנזיר מתקדם עץ הרכבה.

בר חבבי סקס חית:

$$f: R \rightarrow S$$

[illegible]

$$r_n = f(r)n$$

ה. שנינו כי ד ש, צדד

R-हरा (0) 5-1, 5-हरा (0) N PK : 1/86
R-हरा (0) N SK

~~$\mu_1 \otimes \mu_2$~~ $R = S^1 \times S^1$ O_j M, m $R : \pi(0) \rightarrow$
 ~~$\{x_i\}$~~ $R - N$ S -1 $\{x_i\}$ $"\delta$ $S - N$ $\pi(U)$ N
 $= n \in N$ $S^1 \times S^1$ $(0, 2\pi)$, $\{x_i, y_i\}$ $"\delta$ $R - N$ $\pi(U)$ N S^k

$$n = \sum_i s_i y_i = \sum_i \left(\sum_j r_{ij} x_j \right) y_i = \sum_{i,j} r_{ij} x_j y_i$$

הנ"ל נכתב: הירחבת הסדרים.

אם M מוקדם - R , אז הירחבת הסדרים שלו זה $M \otimes S$ (מוקדם- S).

דוגמאות:

$$\begin{array}{ccc} L_2 & \xrightarrow{\quad} & L_1 \oplus L_2 \\ | & & | \\ \mathbb{Q} & \xrightarrow{\quad} & L_1 \end{array}$$

אם, $L_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $L_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$,
 $L_1 \oplus L_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

אם L_1 הירחבת סופית, $L_2 = \mathbb{Q}$, אז:

$$L_1 \oplus L_2 = \mathbb{Q}[L_1]$$

הערב: פה אנו מקבלים עצמאיות של L_1 ו- L_2 (עצמאיות של L_1 ו- L_2).

תוצאה: $L_1 \oplus L_2$ נרחב $\Rightarrow L_1 \otimes L_2$?