

$$T: V_1 \rightarrow V_2$$

$$S: W_1 \rightarrow W_2$$

$$T \otimes S: V_1 \otimes W_1 \rightarrow V_2 \otimes W_2$$

$$(T \otimes S)(v_1 \otimes w_1) = T(v_1) \otimes S(w_1)$$

$$V_1 \xrightarrow{T} V_2 \xrightarrow{R} V_3$$

$$W_1 \xrightarrow{S} W_2 \xrightarrow{L} W_3$$

$$V_1 \otimes W_1 \xrightarrow{T \otimes S} V_2 \otimes W_2 \xrightarrow{R \otimes L} V_3 \otimes W_3$$

$$(R \otimes L) \circ (T \otimes S) = (R \circ T) \otimes (L \circ S)$$

$$\text{End}_F V \otimes \text{End}_F W \xrightarrow{\cong} \text{End}_F (V \otimes W)$$

$$(T \otimes S)(v \otimes w) = T(v) \otimes S(w)$$

$$(T_1 \otimes S_1) \circ (T_2 \otimes S_2) = (T_1 \circ T_2) \otimes (S_1 \circ S_2)$$

$$(T \otimes S)(v \otimes w) = T(v) \otimes S(w)$$

$$(T_1 \otimes S_1) \circ (T_2 \otimes S_2) = (T_1 \circ T_2) \otimes (S_1 \circ S_2)$$

מכפסה אנליטית של אלגבראות (F)

נתונות שתי אלגבראות A, B מעל F . מוגדר
המרחב הווקוארי $A \otimes B$ מעל F (כמרחב ווקוארי).

$$\lambda(a): A \rightarrow A$$

$$: a \in A \rightarrow \lambda(a)$$

$$\lambda(a)(x) = ax$$

$$\lambda(a) \in \text{End}_F A, \lambda(b) \in \text{End}_F B \quad (b \in B)$$

ואם γ ספציפי:

$$l(a, b): A \times B \rightarrow \text{End}_F(A \otimes B)$$

$$l(a, b) = \lambda(a) \otimes \lambda(b) \quad \text{הערה: כיסוי נאיבי}$$

$$L: A \otimes B \rightarrow \text{End}_F(A \otimes B)$$

$$L(a \otimes b) = \lambda(a) \otimes \lambda(b)$$

תהי
כך ש:

$$\zeta = L(\zeta) \eta: A \otimes B \rightarrow A \otimes B$$

$$\zeta = \sum_{i=1}^n \alpha_i \otimes \beta_i \quad \text{נניח}$$

$$\eta = \sum_{j=1}^m \alpha_j \otimes \beta_j$$

$$\zeta \eta = L(\zeta)(\eta) = \sum_{i=1}^n L(\alpha_i \otimes \beta_i)(\eta) = \sum_{i=1}^n (\lambda(\alpha_i) \otimes \lambda(\beta_i))(\eta) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\lambda(\alpha_i) \otimes \lambda(\beta_i))(\alpha_j \otimes \beta_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \alpha_j \otimes \beta_i \beta_j$$

הם סדוקים שם הכפסה הדי $A \otimes B$ אלגברת F .

באופן דומה יהי V מרחב וקטורי מעל F , W מרחב וקטורי מעל F .
אם $\alpha \in A$ ו $\beta \in B$ אז $\alpha \otimes \beta \in A \otimes B$ ו $\alpha \otimes \beta \in V \otimes W$.

$$(\alpha \otimes \beta)(v \otimes w) = \alpha v \otimes \beta w$$

הצגות π ו σ על V ו W בהתאמה. $\pi \otimes \sigma$ על $V \otimes W$.

$$(\pi \otimes \sigma)(\alpha \otimes \beta)(v \otimes w) = \pi(\alpha)(v) \otimes \sigma(\beta)(w)$$

נסת: תהיה G, H חבורות. אז

$$F[G] \otimes F[H] \cong F[G \times H]$$

~~הוכחה~~

~~הוכחה~~

הוכחה: איברי $F[G] \otimes F[H]$ נראים כ-

סכומי
פולינומים

$$\sum_{\substack{g \in G \\ h \in H}} a_{g,h} g \otimes h$$

(איברי g ואיברי h בסיסיים של $F[G]$ ו- $F[H]$)
נגדיר T שמשלחת את איברי δ -

$$\sum_{\substack{g \in G \\ h \in H}} a_{g,h} (g,h)$$

~~שהוא פולינום~~ T איזומומורפיזם של מרחבי וקטורים $(V \otimes W)$ כ"ן

$$T((g_1 \otimes h_1)(g_2 \otimes h_2)) = T(g_1 g_2 \otimes h_1 h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2) =$$

$$= (g_1, h_1)(g_2, h_2) = T(g_1 \otimes h_1) T(g_2 \otimes h_2)$$

ברור כי T איז איזומורפיזם של מרחבי וקטורים.

נניח כי π היא הצגה של G ב- V ו- σ היא הצגה של H ב- W .
 π משקיפה הצגה (נשמנה ב- π) של $F[G]$ ונגדיר σ .

$$\pi(\sum a_g g) = \sum a_g \pi(g)$$

תהי σ הצגה של $F[H]$ ב- W .

המרחב $V \otimes W$ הוא מרחב הצגה של $G \times H$ (נשמנה דקלורציה - $\pi \otimes \sigma$)

$$(\pi \otimes \sigma)(\sum_{g,h} a_{g,h} (g,h)) = \sum_{g,h} a_{g,h} \pi(g) \otimes \sigma(h)$$

$V \otimes W$ - $G \times H$ של הצגה של $G \times H$ (נשמנה דקלורציה - $\pi \otimes \sigma$)

$$(\pi \otimes \sigma)(g,h) = \pi(g) \otimes \sigma(h) \in GL(V \otimes W)$$

כאשר $H = G$ מסתכלים על ההצגה

$$G \rightarrow GL(V \otimes W)$$

$$g \rightarrow \pi(g) \otimes \sigma(g)$$

(מכפסה טרנספורמט פנימית).

לענף: תהיה π, σ הצגות ממשיות של G, H חבורות של G, H .

$$\pi \otimes \sigma \cong \hat{\pi} \otimes \hat{\sigma}$$

$$V_\pi^* \otimes V_\sigma^* = \text{Hom}_F(V_\pi, F) \otimes \text{Hom}_F(V_\sigma, F) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_F(V_\pi \otimes V_\sigma, F) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_F(V_\pi \otimes V_\sigma, F)$$

$$\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_F(V_\pi \otimes V_\sigma, F)$$

$$T: V_\pi^* \otimes V_\sigma^* \xrightarrow{\sim} (V_\pi \otimes V_\sigma)^*$$

$$T(\varphi \otimes \psi)(v \otimes w) = \varphi(v) \psi(w)$$

רואים כי T משקיפה של $\pi \otimes \sigma$ ו- $\hat{\pi} \otimes \hat{\sigma}$

$$T(\hat{\pi} \otimes \hat{\sigma})(\pi \otimes \sigma) = \pi \otimes \sigma$$

$$\begin{aligned}
 T((\pi \otimes \sigma)(g, h)(\varphi \otimes \zeta))(v \otimes w) &= \\
 = T((\pi(g) \otimes \sigma(h))(\varphi \otimes \zeta))(v \otimes w) &= \\
 = T(\pi(g)(\varphi) \otimes \sigma(h)(\zeta))(v \otimes w) &= \\
 = \pi(g)(\varphi)(v) \otimes \sigma(h)(\zeta)(w) &= \\
 = \varphi(\pi(g^{-1})(v)) \zeta(\sigma(h^{-1})(w)) = T(\varphi \otimes \zeta)(\pi(g^{-1})v \otimes \sigma(h^{-1})w) &= \\
 = T(\varphi \otimes \zeta)((\pi \otimes \sigma)(g^{-1}, h^{-1})(v \otimes w)) &= \\
 = \widehat{\pi \otimes \sigma}(g, h)(T(\varphi \otimes \zeta))(v \otimes w)
 \end{aligned}$$

כיון שזה נכון לכל v, w נכונ $T((\pi \otimes \sigma)(g, h)(\varphi \otimes \zeta)) = \widehat{\pi \otimes \sigma}(g, h)(T(\varphi \otimes \zeta))$

וכיון שזה נכון לכל φ, ζ נכונ $T \circ ((\pi \otimes \sigma)(g, h)) = \widehat{\pi \otimes \sigma}(g, h) \circ T$

כך $\exists (g, h) \in G \times H$

תהי π הצגה ממימד סופי של אלגברה A במרחב V של F . נגדיר

$$\chi_\pi: A \rightarrow F$$

$$\chi_\pi(a) = \text{tr}(\pi(a))$$

χ_π נקראת הכיכר של π .

כל הצגות π ממימד n ו n זוגיות נקראות כיון של A . $\chi_\pi = \chi_{\pi^*}$ הומומורפיזם של אלגבראות $\pi: A \rightarrow F$.

המקרה $n=1$ - π הצגה ממימד 1 של אלגברה G - π היי' הומומורפיזם $F \rightarrow F^*$ של חבורות.

תכונות:

נמנה π הצגה ממימד סופי של A .
 (1) $\chi_\pi(a) = \chi_{\pi^*}(a)$ $a \in A$. נכון $\chi_\pi(a) = \text{tr}(\pi(a)) = \text{tr}(\pi^*(a)) = \chi_{\pi^*}(a)$

(2) $u \leq V_\pi$ תת-מרחב אינווריאנטי של π ו $\pi|_u = \sigma$ אז $\chi_\pi = \chi_\sigma + \chi_{\pi/\sigma}$ (המנה π/σ).

ובגר $\chi_\pi = \chi_\sigma + \chi_{\pi/\sigma}$ כאשר $\pi \cong \sigma \oplus \pi/\sigma$

(3) נניח כי A אלגברה עם 1 ו $\chi_\pi(1) = \dim \pi$ (הצגה של חבורה G).

(4) $\chi_\pi(g) = \chi_{\pi^{-1}}(g)$ $g \in G$ (הצגה של חבורה G).

(5) תהי π הצגה אונ'אדית של חבורה G . אז:

$$\chi_\pi(g^{-1}) = \overline{\chi_\pi(g)}$$

(6) תהי π, σ הצגות ממימד סופי של אלגבראות A, B אז:

$$\chi_{\pi \otimes \sigma}(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i) = \sum_{i=1}^n \chi_\pi(a_i) \chi_\sigma(b_i)$$

$$\chi_{\pi \otimes \sigma}(g, h) = \chi_\pi(g) \chi_\sigma(h)$$

במרחב:

הוכחה: נניח כי V_π ו- V_σ שני מרחבי וקטורים

$$T: V_\pi \xrightarrow{\sim} V_\sigma$$

$$T\pi(a) = \sigma(a)T$$

$$\pi(a) = T^{-1}\sigma(a)T$$

$$\text{tr}(\pi(a)) = \text{tr}(\sigma(a))$$

$$\chi_\pi(ab) = \text{tr}(\pi(ab)) = \text{tr}(\pi(a)\pi(b)) = \text{tr}(\pi(b)\pi(a)) = \text{tr}(\pi(ba)) = \chi_\pi(ba) \quad (1)$$

(2) נניח כי V_π ו- V_σ הם מרחבי וקטורים

$$[\pi(a)]_B = \begin{pmatrix} \chi(a) & * \\ 0 & \chi_\pi(a) \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \chi(a) & * \\ 0 & \chi_\pi(a) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{dim } V_\pi \\ \text{dim } V_\sigma \end{matrix}$$

$$\chi_\pi(a) = \text{tr}(\pi(a)) = \text{tr}(\chi(a)) + \text{tr}(\chi_\pi(a)) = \chi_\sigma(a) + \chi_\pi(a)$$

$$\chi_\pi(1) = \text{tr}(id_{V_\pi}) = \dim V_\pi = \dim \pi$$

נניח כי V_π ו- V_σ הם מרחבי וקטורים

$$[\hat{\pi}(g)]_B = [\pi(g^{-1})]_B^t$$

$$\chi_{\hat{\pi}}(g) = \text{tr}([\hat{\pi}(g)]_B) = \text{tr}([\pi(g^{-1})]_B^t) = \text{tr}([\pi(g^{-1})]_B) = \chi_\pi(g^{-1})$$

$$\chi_\pi(g^{-1}) = \text{tr}(\pi(g^{-1})) = \text{tr}(\pi(g)^{-1}) = \text{tr}(\pi(g)^*) = \overline{\text{tr}(\pi(g))} = \overline{\chi_\pi(g)} \quad (5)$$

נניח כי V_π ו- V_σ הם מרחבי וקטורים

$$B_{V_\pi} = \{v_1, \dots, v_n\}, \quad B_{V_\sigma} = \{w_1, \dots, w_m\}$$

$$B_{V_\pi \otimes V_\sigma} = \{v_1 \otimes w_1, v_1 \otimes w_2, \dots, v_1 \otimes w_m, v_2 \otimes w_1, \dots, v_n \otimes w_m\}$$

$$[\pi(a)]_{B_{V_\pi}} = (\chi_{ij}(a))_{1 \leq i, j \leq n}$$

$$[\sigma(b)]_{B_{V_\sigma}} = (y_{rs}(b))_{1 \leq r, s \leq m}$$

$$[\pi(a) \otimes \sigma(b)]_{B_{V_\pi \otimes V_\sigma}} = (\chi_{ij}(a) y_{rs}(b))_{1 \leq i, j \leq n, 1 \leq r, s \leq m}$$

$$X_{n \times n} \otimes Y_{m \times m} = \begin{pmatrix} x_{11}Y & x_{12}Y & \dots & x_{1n}Y \\ x_{21}Y & x_{22}Y & \dots & x_{2n}Y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}Y & x_{n2}Y & \dots & x_{nn}Y \end{pmatrix}$$

כיתר פירוט
כאשר במרחב
בסיס פ'ס'ס

$$\text{tr}(X \otimes Y) = \sum_{i=1}^n \text{tr}(Y) x_{ii} = \text{tr}(X) \text{tr}(Y)$$

5/41

פרק ב' - הפעולה של שור (Schor)

הפעולה של שור (מאריך קטנה):

- י"ה V מוקדם א' - כ"ד נעם אפסרה A , ו"ה W מוקדם נעם A
- א' נעם כ' י"ג ש' א' כ"ד $Hom_A(V, W)$, א"ס ד' חת"ס
- א' נעם כ' $Hom_A(W, V)$, א"ס ד' חת"ס
- א' נעם כ"ד $End_A(V)$ ה"א אפסרה ע"פ חת"ס נעם F
- א' נעם כ' W א' - כ"ד, א"ס $V \cong W$ כ"ד מוקדם נעם A
- א' נעם כ' F $Hom_A(V, W) \neq 0$ א"ס ד' חת"ס
- א' נעם כ' $W \cong V$ א"ס ד' חת"ס
- א' נעם כ' $Hom_A(V, W)$ א"ס ד' חת"ס
- א' נעם כ' $Hom_A(V, W)$ א"ס ד' חת"ס

הוכחה:

- א' $Ker T$ תת-מוקדם של V , $T \neq 0$, ו"ס $Ker T \neq V$ א"ס ד' חת"ס
- א' $Im T$ תת-מוקדם של V , $T \neq 0$, ו"ס $Im T \neq V$ א"ס ד' חת"ס
- א' $V \cong W$ א"ס ד' חת"ס
- א' $0 \neq T \in Hom_A(V, W)$ א"ס ד' חת"ס
- א' $0 \neq T \in Hom_A(V, W)$ א"ס ד' חת"ס
- א' $0 \neq T \in Hom_A(V, W)$ א"ס ד' חת"ס

$ST^{-1} \in End_A(W)$ א"ס ד' חת"ס

$ST^{-1} \in End_A(W)$ א"ס ד' חת"ס

$ST^{-1} \in End_A(W)$

א"ס ד' חת"ס, $ST^{-1} = \lambda I_W$, $S = \lambda T$

הוכחה: $Z(A)$ תת-מוקדם של A , א"ס ד' חת"ס

$$\pi(z) = \omega_{\pi}(z) I_{V_{\pi}}$$

א"ס ד' חת"ס, $\pi(z)\pi(w) = \pi(w)\pi(z)$, $z \in Z(A)$ א"ס ד' חת"ס

Proposition 1.1.1 Sei V, W k -Vektorräume. Dann gilt:

תה' π הצגה μ A בחומה V עריקה σ σ

$$\overline{\pi} \cong n_1 \overline{\pi}_1 \oplus \dots \oplus n_r \overline{\pi}_r$$

כאשר μ_1, μ_2 הם מסות μ_1, μ_2 ו- r הוא המרחק ביניהן. G הוא קבוע הכבידה.

$$n_1 \pi_1 \cong \underbrace{\pi_1 \oplus \dots \oplus \pi_1}_{n_1}$$

תהי σ העליונה A במרחב W פריק שחסות:

$$\sigma \cong m_1 \pi_1 \oplus \dots \oplus m_r \pi_r \oplus m_{r+1} \tau_{r+1} \oplus \dots \oplus m_l \tau_l$$

$\tau_{r+1}, \dots, \tau_\ell$ ובה זאת
מכאן שיש פחות מ- r

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$$

יש ב' צוק. פ

$$V_i = V_{i_1} \oplus \dots \oplus V_{i_{n_i}}$$

$$: 1 \leq i \leq K \quad \text{and} \quad 1 \leq j \leq K$$

כאשר V_i, V_{i+1} נרחבים יד החבית

$$\overline{\pi}^{V_j} \cong \overline{\pi}_i \quad 1 \leq i \leq k, \quad 1 \leq j \leq n.$$

$$W = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$$

קטלן / מנה

$$W_i = W_{i,1} \oplus \dots \oplus W_{i,m_i}$$

$$1 \leq j \leq m; \quad \sigma \sigma_{i,j} \approx \pi; \quad 1 \leq i \leq r \quad (2.12)$$
$$1 \leq j \leq m, \delta > \delta, \sigma^{w_{i,j}} \approx \tau_i, \quad 1 \leq i \leq l \quad \forall \epsilon > 0$$
$$: sk, T \in \text{Hom}_A(V, W) \text{ '}' : \underline{D} J \mathcal{K}$$

$$T(V_{r+1} \oplus \dots \oplus V_K) = 0 \quad (10)$$

$$T(V_i) \subseteq W_i, \quad 1 \leq i \leq r \quad \text{SSS (2)}$$

$T_{ij} = T|_{V_{ij}}$ (NO) $T(V_i) = 0$ ו' $1 \leq i \leq K$ פרטות: k

$\begin{matrix} W_s \text{ } \delta\sigma & W \text{ } \delta\sigma & \supset \delta\sigma & R_s \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ R_s \cdot T_{ij} & \delta\sigma & \delta\sigma & \oplus W_s \end{matrix}$

A מרחב וקטורי $V_i \rightarrow W$ מרחב וקטורי

$$R_s(T_{ij}) \neq R_s(T_{ij} p_k) \quad s_k \text{ מ' } V_i - \emptyset$$

$$R_s(T_{ij}(V_{ij})) = CW_s \quad s_k$$

א' ב' (הצבה) $\pi_s - \delta$ π_s $\pi_s - \delta$
שקט π_i δ π_i δ π_i δ

$$T_{ij}(v) = \sum_s R_s(T_{ij}(v)) = 0 \quad \because p_{ij} \in V_{ij} \quad v \in V_{ij}$$

$1 \leq j \leq n_i$ $\implies T_{ij} = 0$ $s=1$ $\forall v \in V_i$ $\implies T_{ij}(v) = 0$ $\forall v \in V_i$ $\implies T(v) = 0$

$$T_{ij}(v) = \sum_{s=1}^k R_s(T_{ij}(v)) = R_i(T_{ij}(v)) \in W_i$$
$$: \psi \hat{\rho}_N$$

עם רוק

יחידות במספר
כאשר $1 \leq i \leq k$

$\pi_i^{V_i} = \pi_i$ - ש
 $\mu_i = \mu_i'$ - כן
 $\delta \leq \delta$ - כן
 $V_i = V_i'$ - כן

$$V_i \subseteq V_i' \quad \text{and}$$

$V_i' = V_i$

[illegible]

$$\cong \bigoplus \text{Hom}_A(V_i, W_i)$$

$$\text{Hom}_A(V, W) \cong \text{Hom}_A(V, \bigoplus_{i=1}^n W_i) \cong \bigoplus_{i=1}^n \text{Hom}_A(V, W_i)$$

חשוב: תהי π_0 רצף כל-עריקה של A ב- V_{π_0} . נטמך שתי הרצפים σ, τ של A כך ש- $\sigma \approx \tau$, $\pi_0 \approx \pi$.
נבחר ב- Δ את אלמנט הוואניטיבי של V_π של A ושל V_σ .
(אפשר להחסוך חלקים).
 k : איזומורפיזם של מרחקים וגורמים
 $\text{Hom}_A(V_\pi, V_\sigma) \cong M_{m \times n}(\Delta)$

איצמורב'ס שם
חירב'ס יגאריין

$$\begin{aligned} \pi &\approx \pi_0 \\ \gamma_i &\approx \pi_0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &V_\pi = u_1 \oplus \dots \oplus u_n \\ &V_\sigma = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_m \end{aligned} \quad \text{דרכה: נכתוב}$$

$$\begin{aligned} i \leq n, \quad A_i: V_{\pi_0} &\xrightarrow{\alpha} U_i \quad \text{P'NS'27N15'k} \quad \delta 27J \\ j \leq m, \quad B_j: V_{\pi_0} &\xrightarrow{\sim} Y_j \end{aligned}$$

$\delta \circ \sigma$ map from δ to σ $P_i: V_\pi \rightarrow U_i$ (NO) $T \in \text{Hom}(V_\pi, V_i)$
 $Q_i: V_\sigma \rightarrow Y_i$ $\delta \circ \sigma$ $\bigoplus_{U_i} V_i$

$$T(v) = \sum_{j=1}^n T p_j(v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m Q_i \underbrace{T p_j(v)}_{T_j^{-1} p_j(v)} \quad . T \in \text{Hom}_A(V_2, V_1) \text{ ידוע}$$

$$. T_j = T|_{U_j} \quad \text{נכון}$$

$$Q_i T_j \in \text{Hom}_A(U_j, Y_i)$$

$$. B_i^{-1} Q_i T_j A_j \in \text{End}_A(V_{ij}) \text{ כעת}$$

$$X_{ij}(\tau) = \Delta$$

$$Q_i T_j = B_i X_{ij}(\tau) A_j^{-1}$$

כעת

$$T(v) = \sum_{i,j} B_i X_{ij}(\tau) A_j^{-1} (p_j(v))$$

$$\varphi(T) = (X_{ij}(\tau))_{\substack{i \leq m \\ j \leq n}} \text{ מטריצה}$$

φ הפונקציה שמשלחת את המטריצה X של T למטריצה $\varphi(T)$ של $\varphi(T)$ בהתאם לטבלה