

הצגות

טענה: תהי π הצגה פריקה של אלגברה A במרחב V . אז כל תת-הצגה וכל אוסף מנה של π פריקות שקילות.

הוכחה: $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ - אי-פריקה.

יהי $U \leq V$ תת-מרחב אינבריאנט. יהיו U_i נייט פריקות. $U = U \oplus \bigoplus_{i=1}^n V_i$ עבור V_i כלשהם.

נניח שמת' אחר U סדר ההכנסה:

$$V = \left(\bigoplus_{i \in I} V_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{j \in J} V_j \right)$$

של הצגה באחרונה מההצגה הקודמת.

$U \cong \bigoplus V_i$ כחבורות נוספות A (מרחב הצגה של A)

קניפציה

$$\pi^U \cong \bigoplus \pi^{V_i}$$

כחבורה

כחבורה של $\bigoplus V_i$

$$V/U \cong \bigoplus V_i/U_i$$

עכשיו π^{V_i/U_i} (הצגת המנה) שקושרה π^{V_i} ופריקה עכשווית.

משפט: יהי V חבורה נוספת אלגברה A . נניח כי נתונים שני פריקות של V :

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k = U_1 \oplus \dots \oplus U_l$$

כאשר U_i, V_i תת-חבורות אי-פריקות. אז $k=l$, ואינסוף שית $V_i \cong U_i$.

הוכחה: נניח כי $1 \leq k \leq l$ אז $V_1 = U_1 \oplus \dots \oplus U_l$

כיון ש- V_1 אי-פריקה ליה מנח"ם ש- $l=1$ ואז $V_1 = U_1$. נניח כי $1 < k$. נסת' $W = V_2 \oplus \dots \oplus V_k$. אז יש תת-חבורה $V = W \oplus U_1 \oplus \dots \oplus U_l$.

כיון ש- $V = W \oplus V_1$ ו- $V = \left(\bigoplus_{i=1}^l U_i \right) \oplus U_1 \oplus \dots \oplus U_l$

מתקיים עכ"ל אחרי טענה מההצגה הקודמת נקבע $V_1 \cong U_1$. ומכאן $V_2 \cong U_2 \oplus \dots \oplus U_l$ ונחזור על התהליך. נניח כי ידוע, ואז:

נחש' באינדוקציה עכשיו את המהותיות. אז $V = W \oplus U_1 \oplus \dots \oplus U_l = W \oplus U_1 = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$

הצגה: תהי A אטלורה עם n טורי F ואליו n כ
 A פשוטה (semisimple) אם A פשוט פשוטה

$A = \sum J_i$ כאשר J_i אידיאל פרימיטיבי מנימיאלי.

הצגה: הסכום ההדדית סופי נכונה:

$$1 = \sum_{i=1}^n e_i, \quad e_i \in J_i$$

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \quad \alpha \in A$$

$$A = \sum_{i=1}^n J_i \quad \text{פשוט}$$

J_i הם תתי-חבורות אי-ברוקר של A (חבורה)
 של אידיאלים J_i כך ש- $A = \sum J_i$ הסכום הישר שלם.
 נכתוב שוב $1 = \sum_{i=1}^n e_i$ ($\{J_i\}_{i=1}^n = \{J_i\}_{i=1}^n$)

$$0 \neq Ae_i \subseteq J_i$$

$$J_i = Ae_i, \quad J_i \text{ מנימיאלי}$$

$$e_j = e_j \cdot 1 = \sum_{i=1}^n e_j e_i$$

$$e_j e_i = \delta_{ij} e_j, \quad A = \bigoplus J_i$$

כך אידיאל מנימיאלי של A איזוהי (חבורה)
 של A סגור $J_1 \rightarrow J_2 \rightarrow \dots \rightarrow J_n$ כאשר J_i מנימיאלי

$$A = J_1 \oplus J_2 \oplus \dots \oplus J_n = \left(\bigoplus_{i=1}^n J_i \right) \oplus (J_1 \oplus \dots \oplus J_n)$$

$$J \cong \bigoplus J_i$$

מאפיין ברוקר J פשוט
 $J \cong J$ פשוט

הצגה: A אטלורה (פשוטה) עם n טורי F ואליו n כ
 הצגה: A פשוטה אם A מנימיאלי סופי
 הצגה: הצגה ברוקר (חבורה) מנימיאלי פשוטה
 הצגה: הצגה ברוקר (חבורה) מנימיאלי פשוטה

$$A = \bigoplus_{i=1}^n J_i \quad \text{פשוט}$$

$$V_\pi = A \cdot V_\pi = \sum_{i=1}^n J_i \cdot V_\pi$$

$$J_i \cdot V_\pi = Ae_i \cdot V_\pi = e_i \cdot V_\pi = Fv_i$$

$$V_\pi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n J_i \cdot V_\pi = \sum_{i=1}^n J_i \cdot V_\pi$$

$J_i \cdot V_\pi = J_i \cdot V_\pi$ פשוט
 $J_i \cdot V_\pi = J_i \cdot V_\pi$ פשוט
 $J_i \cdot V_\pi = J_i \cdot V_\pi$ פשוט
 $J_i \cdot V_\pi = J_i \cdot V_\pi$ פשוט

הוכחה: נניח N חבורה פנימית $(,)$ של V .
 N היא תת-חבורה פנימית של V ; $u, v \in N$

$$\langle u, v \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\pi(g)u, \pi(g)v)$$

אם N היא תת-חבורה פנימית של V , אז N היא תת-חבורה פנימית של V .
 כלומר, N היא תת-חבורה פנימית של V .

$$\langle \pi(h)u, \pi(h)v \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\pi(gh)u, \pi(gh)v) = \langle u, v \rangle$$

הערה: נניח N היא תת-חבורה פנימית של V .
 אז N היא תת-חבורה פנימית של V .

$$T: V_N \rightarrow V_N$$

שם ההצגות של N על V_N היא T .

אנחנו רוצים להראות: $T \cong \sigma$ (כאשר σ היא ההצגה של N על V_N).
 כלומר, T היא ההצגה של N על V_N .

הוכחה: נניח $T: V_N \rightarrow V_N$ היא ההצגה של N על V_N .

אם N היא תת-חבורה פנימית של V , אז N היא תת-חבורה פנימית של V .
 כלומר, N היא תת-חבורה פנימית של V .

אם N היא תת-חבורה פנימית של V , אז N היא תת-חבורה פנימית של V .
 כלומר, N היא תת-חבורה פנימית של V .

$$u^* u = (P^{-1})^* T^* T P^{-1} = P^{-1} P^2 P^{-1} = I$$

כלומר, u היא וקטור יחידה.

$$T(\pi(g)) = \sigma(g) \Rightarrow u P \pi(g) = \sigma(g) u P$$

$$\pi(g)^* = \pi(g)^{-1} = \pi(g^{-1})$$

$$u P \pi(g)^* = \sigma(g)^* u P$$

$$\pi(g) P u^{-1} = P u^{-1} \sigma(g)$$

כלומר, P היא איזומורפיזם בין π ל- σ .

$$\pi(g) P^2 = \pi(g) P u^{-1} u P = P u^{-1} \sigma(g) u P = P u^{-1} u P \pi(g) = P^2 \pi(g)$$

$$P = \sum_{i=1}^n E_i$$

אם N היא תת-חבורה פנימית של V , אז N היא תת-חבורה פנימית של V .
 כלומר, N היא תת-חבורה פנימית של V .

$$P^2 = \sum_{i=1}^n E_i$$

אם N היא תת-חבורה פנימית של V , אז N היא תת-חבורה פנימית של V .
 כלומר, N היא תת-חבורה פנימית של V .

מכשור הסדר

מרחב וקטורי V, W מעל F עם בסיסים $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ו- $\{w_\beta\}_{\beta \in J}$ בהתאמה.

$$V \otimes W = \left\{ \sum_{\alpha \in I, \beta \in J} x_{\alpha, \beta} v_\alpha \otimes w_\beta \right\}$$

המרחב $V \otimes W$ הוא המרחב הווקטורי המיוצר על ידי $v_\alpha \otimes w_\beta$ (בסיס F).

כל $v \in V, w \in W$ נכתב בצורה הבאה:

$$v = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha v_\alpha \in V, \quad w = \sum_{\beta \in J} y_\beta w_\beta \in W$$

$$v \otimes w = \sum_{\alpha \in I, \beta \in J} x_\alpha y_\beta v_\alpha \otimes w_\beta$$

ברור כי:

$$(av + bw) \otimes (cw + dw) = ac(v \otimes w) + ad(v \otimes w) + bc(v \otimes w) + bd(v \otimes w)$$

נניח $\{v'_\alpha\}_{\alpha \in I}, \{w'_\beta\}_{\beta \in J}$ בסיסים חדשים.

הבסיס $\{v'_\alpha \otimes w'_\beta\}_{\alpha \in I, \beta \in J}$ של $V \otimes W$ נכונת את המרחב.

$$v'_\alpha = \sum_{\gamma \in I} x'_{\gamma, \alpha} v_\gamma, \quad v_\alpha = \sum_{\gamma \in I} x'_{\gamma, \alpha} v'_\gamma$$

$$w'_\beta = \sum_{\eta \in J} y'_{\eta, \beta} w_\eta, \quad w_\beta = \sum_{\eta \in J} y'_{\eta, \beta} w'_\eta$$

ברור כי הקבוצה $\{v'_\alpha \otimes w'_\beta\}$ היא בסיס.

$$\sum_{\alpha \in I, \beta \in J} z_{\alpha, \beta} v'_\alpha \otimes w'_\beta = 0$$

$$\sum_{\alpha \in I, \beta \in J} z_{\alpha, \beta} \sum_{\gamma \in I, \eta \in J} x'_{\gamma, \alpha} y'_{\eta, \beta} (v_\gamma \otimes w_\eta) = 0$$

$$\sum_{\alpha \in I, \beta \in J} z_{\alpha, \beta} x'_{\gamma, \alpha} y'_{\eta, \beta} = 0, \quad \forall \gamma, \eta$$

נבדוק $\gamma = \alpha, \eta = \beta$ ונקבל:

$$0 = \sum_{\alpha \in I, \beta \in J} z_{\alpha, \beta} \left(\sum_{\gamma \in I} x'_{\gamma, \alpha} x_{\gamma, \alpha} \right) \left(\sum_{\eta \in J} y'_{\eta, \beta} y_{\eta, \beta} \right) = z_{\alpha, \beta}$$

טורן העתקה בינארית $t: V \times W \rightarrow X$ של מרחבי וקטור

אפשר להרחיב את t להעתקה עילית

$$T: V \otimes W \rightarrow X$$

$$T(v \otimes w) = t(v, w)$$

כך ש

עקב

$$T(\sum x_{\alpha\beta} v_{\alpha} \otimes w_{\beta}) = \sum x_{\alpha\beta} t(v_{\alpha}, w_{\beta})$$

יש העתקה עילית

$$T: V \otimes W \rightarrow X$$

$$\begin{aligned} v = \sum x_{\alpha} v_{\alpha} \quad w = \sum y_{\beta} w_{\beta} \quad \left. \begin{array}{l} T(v \otimes w) = T(\sum x_{\alpha} y_{\beta} v_{\alpha} \otimes w_{\beta}) = \\ = \sum x_{\alpha} y_{\beta} t(v_{\alpha}, w_{\beta}) = \\ = t(\sum x_{\alpha} v_{\alpha}, \sum y_{\beta} w_{\beta}) = t(v, w) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{t} & X \\ & \searrow i & \uparrow T \\ & & V \otimes W \end{array}$$

ההתאמה $t \mapsto T$ היא איזומורפיזם

$$B: l_F(V \times W, X) \cong \text{Hom}_F(V \otimes W, X)$$

$$T(v \otimes (u \otimes w)) = v \otimes (u \otimes w)$$

$$\begin{aligned} T(v \otimes (u \otimes w)) &= v \otimes (u \otimes w) \\ T(v \otimes (u \otimes w)) &= v \otimes (u \otimes w) \\ T(v \otimes (u \otimes w)) &= v \otimes (u \otimes w) \end{aligned}$$

$$V \otimes_F W \cong \text{Hom}_F(W^*, V) \quad \text{כאשר } \dim_F W < \infty$$

הוכחה: נשתמש בקבוצת הבסיס

$$T(\sum x_{\alpha\beta} v_{\alpha} \otimes w_{\beta})(\varphi) = \sum x_{\alpha\beta} \varphi(w_{\beta}) v_{\alpha} \in V$$

נניח $\varphi \in \ker T$ כלומר $\sum x_{\alpha\beta} \varphi(w_{\beta}) v_{\alpha} = 0$

$$\sum_{\alpha \in I} \left(\sum_{\beta \in J} x_{\alpha\beta} \varphi(w_{\beta}) \right) v_{\alpha} = 0$$

$$\sum_{\beta \in J} x_{\alpha\beta} \varphi(w_{\beta}) = 0 \Rightarrow \varphi(\sum_{\beta \in J} x_{\alpha\beta} w_{\beta}) = 0$$

$$\sum_{\beta \in J} x_{\alpha\beta} w_{\beta} = 0 \quad \text{כל } \alpha \in I$$

4

הערה: $R: W^* \rightarrow V$ היא תהיה $\tau: \delta \delta$
 $\{w_\beta\}_{\beta \in J}$ $\delta \delta$ $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$
 $R(v_\beta) = \sum_{\alpha \in I} x_{\alpha, \beta} v_\alpha$
 נניח

$$T\left(\sum x_{\alpha, \beta} v_\alpha \otimes w_\beta\right)(v_{\beta'}) = \sum x_{\alpha, \beta} v_\alpha (w_{\beta'} | v_\alpha) = \sum x_{\alpha, \beta'} v_\alpha = R(v_{\beta'})$$

כאן $\tau^{-1}, R = T\left(\sum x_{\alpha, \beta} v_\alpha \otimes w_\beta\right)$

$S: V_2 \rightarrow W_2, T: V_1 \rightarrow W_1$ הם תהיה $\delta \delta$
 $f: V_1 \times V_2 \rightarrow W_1 \otimes W_2$ $\delta \delta$

$$f(v_1, v_2) = T(v_1) \otimes S(v_2)$$

כאן $\delta \delta$ $\delta \delta$ $\delta \delta$
 $L: V_1 \otimes V_2 \rightarrow W_1 \otimes W_2$ $\delta \delta$ $\delta \delta$
 $L(v_1 \otimes v_2) = f(v_1, v_2) = T(v_1) \otimes S(v_2)$
 $L = T \otimes S$ $\delta \delta$

$$\text{Hom}_F(V_1, W_1) \otimes \text{Hom}_F(V_2, W_2) \rightarrow \text{Hom}_F(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2)$$