

פונקציות מרוכבות

asafnach @ Post.tau.ac.il - ד"ר נחמאס

ניין - x 90 בחינה
x 10 תרגילי בית (אם יש הזדמנות)

ספרות -
Sardas - complex function theory
Ahlfors - complex analysis
Needham - Visual complex analysis

מספרים מרוכבים

נוסף את שורש המשוואה $x^2 + 1 = 0$ ונקרא לו i .
במחשבים, כל מספר הוא מהצורה $a + bi$ כש- $a, b \in \mathbb{R}$.
סוגיות - חיבורים הם כלומר על מניינים: $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + ai \cdot di + b \cdot ci + b \cdot di^2 =$$

$$= (ac - bd) + i(ad + bc)$$

איבר היחידה $(0, 0)$ - שכיבוי
איבר היחידה $(1, 0)$ - כפל

$$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$$

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

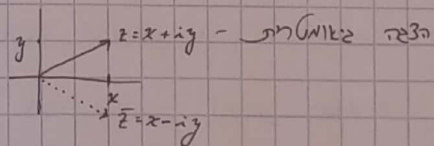
אין נמצא הופכי? נטן $(a, b) \in \mathbb{C}$. $(x, y) \in \mathbb{C}$ כנ"ל: $(1, 0) = (a, b)(x, y)$
נקבע:

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

מייחס $\mathbb{C}$ - $\mathbb{R}$ על חלק n . במקום (x, y) נכתוב x .

נמא: $i := (0, 1)$

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$\operatorname{Re}(z) = x, \operatorname{Im}(z) = y \quad \text{סיומנים - אם } z = x + iy \quad (אם)$$

$$\bar{z} = x - iy \quad \text{המנוגד של } z = x + iy$$

$$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{אי-ה-1}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}), \quad \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

נמא: $(r = |z|)$ הזווית של הוקטור z צר ה- x ה- θ ו- r אורכו (אם $z \in \mathbb{C}$)

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}, \quad \sin \theta = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}, \quad z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

הצורה - עיבור $z \in \mathbb{C}$ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ $r = |z|$ $\theta = \arg(z)$ θ מקדמת i הנחשבת

לפי $\arg(z) = \theta + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}$ $-\pi < \theta \leq \pi$ הנקראת θ_0

$$\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}, \arg(i) = \frac{\pi}{2}, \arg(-2) = \pi$$

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), w = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$z \cdot w = r \rho (\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi))$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} (\cos \theta - i \sin \theta), |z| \cdot |w| = |z \cdot w|$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

$$z = r e^{i\theta} \quad z^n = r^n e^{i n \theta}$$

תוצאה - הולכים לאט.

אופרטור

1. $D_2(r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z_0 - z| < r\}$: $r > 0, z_0 \in \mathbb{C}$ סביבת פתוחה
2. $D_2(r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z_0 - z| \leq r\}$: סביבה סגורה
3. $D_2^+(r) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z_0 - z| \leq r\}$: סביבה חלקית
4. $\partial D_2(r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z_0 - z| = r\}$: סביבה סגורה

הצורה - $U \subseteq \mathbb{C}$ יהיה פתוחה אם לכל $z \in U$ קיים $r > 0$ כך ש- $D_2(r) \subseteq U$

הצורה - $A \subseteq \mathbb{C}$ נקראת פתוחה אם קיים $r > 0$ כך ש- $D_2(r) \subseteq A$

לעומת - $\overline{D_2(r)} = D_2(r)$ אינה קבוצה פתוחה, $\overline{D_2(r)} = D_2(r)$

הצורה - $F \subseteq \mathbb{C}$ סגורה אם $F^c = \mathbb{C} \setminus F$ פתוחה

לעומת - איחוד סופי של קבוצות פתוחות הוא פתוח

הצורה - אם $A \subseteq \mathbb{C}$ אז $\overline{A} = \bigcap_{F \supseteq A} F$ $\overline{A}$ הסגור של A

$$\partial A = \bar{A} \setminus \text{Int}(A)$$

הצורה - השפה של קב A היא

- למשל - $A \subseteq \mathbb{C}$
1. $z \in \partial A$ אם $\delta > 0$ אז $D_\delta(z) \cap A \neq \emptyset$ ו- $D_\delta(z) \cap A^c \neq \emptyset$
 2. $\bar{A} = \partial A \cup \text{Int}(A)$
 3. $\partial A, \bar{A}$ סגורים
 4. $F = \bar{F}$ אם $F \subseteq \mathbb{C}$

סדרות

הצורה - $\{z_n\}$ סדרה של נקודות במישור $\mathbb{C}$ היא סדרה של מספרים מרוכבים $z_n = x_n + iy_n$ כאשר $x_n, y_n \in \mathbb{R}$.
 $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$ אם $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ כזה ש- $|z_n - z| < \varepsilon$ לכל $n \geq N$.
 (כלומר $|z_n - z| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$)

למשל - $\{z_n\}$ מתכנסת אם $\{Re(z_n)\}$ ו- $\{Im(z_n)\}$ מתכנסות.
 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Re(z_n) + i \lim_{n \rightarrow \infty} Im(z_n)$

למשל - אם $z_n \rightarrow z$ ו- $w_n \rightarrow w$ אז $z_n \pm w_n \rightarrow z \pm w$, $z_n \cdot w_n \rightarrow z \cdot w$, $\bar{z}_n \rightarrow \bar{z}$, $|z_n| \rightarrow |z|$, $\frac{z_n}{w_n} \rightarrow \frac{z}{w}$ (אם $w \neq 0$)

למשל - $A \subseteq \mathbb{C}$ קב A סגור אם ורק אם $z \in \bar{A} \implies z \in A$

הצורה - תהי $A \subseteq \mathbb{C}$ קב סגור, $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה רציפה. $z_0 \in A$ נקודה.
 $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$ אם $z_n \rightarrow z_0$.
 (כלומר f רציפה אם היא רציפה בכל A)

למשל - $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, $g: B \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in A \cap B$ נקודה.
 • $f \neq g$ אם $z_0 \in A \cap B$ ו- $f(z_0) \neq g(z_0)$.
 • $f \cdot g$ אם $z_0 \in A \cap B$ ו- $f(z_0) \neq 0$ ו- $g(z_0) \neq 0$.
 • $Re(f), Im(f)$ רציפות ב- z_0 אם f רציפה ב- z_0 .

למשל - $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ רציפה ב- z_0 אם ורק אם $f(A) \subseteq B$ ו- g^{-1} רציפה ב- $f(z_0)$.
 כלומר $g \circ f: A \rightarrow \mathbb{C}$ רציפה ב- z_0 .

למשל - $u \subseteq \mathbb{C}$, $f: u \rightarrow \mathbb{C}$ רציפה אם $v \subseteq \mathbb{C}$ פתוח, $f(v)$ פתוח.

קבוצות קומפקטיות

הצורה - $A \subseteq \mathbb{C}$ חסומה אם קיים סדר כך ש- $A \subseteq D_0(R)$

טענה - $\{z_n\}$ חסומה ג-ע. אז יש לה תת' מתכנסת.

הוכחה - $z_n = x_n + iy_n$. אז $|x_n|, |y_n| \leq |z_n|$. אז מחסמות x_n , y_n .
 $\{x_n\}$ סדרה חסומה. אז מבולצ'אן-ווייט'רס, יש תת' $\{x_{n_k}\}$ מתכנסת ל- x .
 נסתכל על $\{y_{n_k}\}$. גם היא חסומה ולכן יש לה תת' מתכנסת ל- y .
 $\{x_{n_k}\}$ מתכנסת ל- x .
 אז $z_{n_k} \rightarrow x + iy$.

הצורה - $A \subseteq \mathbb{C}$ קומפקטית אם לכל סדרה $\{z_n\} \in A$ יש תת' מתכנסת $z \in A$.

טענה - קומפקטיות $\leftrightarrow$ סגורה וחסומה.

הוכחה - $\rightarrow$ אם הקבוצה סגורה וחסומה, מטענה לבג' טעם סדרה בקבוצה יש תת' מתכנסת, ומסגרות הבג' בקבוצה.

$\leftarrow$ A קומפקטית. A חסומה, אז קיים M כזה ש- $|z_n| \leq M$, ולפיכך לא תת' $\{z_n\}$ מתכנסת ל- $z \notin A$.
 אם סגורה, מכיוון שאם $\{z_n\} \in A$ סדרה מתכנסת $z \rightarrow z$, אז $z \in A$.
 דפי הצורה קומפקטיות $z \in A$, ומכאן A סגורה.

טענה - $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ רציפה ו- $K \subseteq A$ קומפקטית אז $f(K)$ קומפקטית.

טענה - $K \subseteq \mathbb{C}$ היא קומפקטית אם ורק אם $K = \overline{K}$ ו- K חסומה.
 יש $I_0 \subseteq I$ סופית כך ש- $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in I_0} U_\alpha$.

קשירות מסלית

הצורה - מסלול $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ רציף. עובר $a < b$ נחמין.
 מסלול γ מ- z_1 ל- z_2 הוא סגור ש- $\gamma(a) = z_1$ ו- $\gamma(b) = z_2$.

הצורה - $A \subseteq \mathbb{C}$ תיקו קשירה מסלית אם לכל $z_1, z_2 \in A$ יש מסלול מ- z_1 ל- z_2 .

הצורה - $A \subseteq \mathbb{C}$ תיקו תחום (Domain) אם היא פתוחה וקשירה מסלית.

טענה - אם A תחום אז לכל $z_1, z_2 \in A$ יש מסלול המקשר ביניהם המורכב מקטעים מקבילים לצירים.

הוכחה - נקח מסלול כלשהו $\gamma: [a, b] \rightarrow A$.
 אז לכל $t \in [a, b]$ יש זיסק $\gamma(t) \in A$.
 $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ הוא חיסוי של $\gamma(t)$.
 נניח ש- $x(t) = a$, $y(t) = b$.
 (צריך לטעון שאפשר לקחת $\gamma(t) \in A$ ש- $x(t) = a$, $y(t) = b$).
 ואז $\gamma(t) \in A$ מסלול מקבילים לצירים קר $\gamma(t)$.

הנגזרת המרוכבת

תהי $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, D קב' פתוחה, $z_0 \in D$.
 f תיקרא גזירה במובן המרוכב ב- z_0 אם קיים הגבלה:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} =: f'(z_0)$$

כלומר: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall |h| < \delta, \left| \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$

* קום נגזרת מרוכבת זו דרישה יותר חזקה מקום נגזרת מממיתית.
 שמשל, נוכיח בהמשך שאם f גזירה בכל נקודה, אז גם f' גזירה.

הערה - נאמר ש- f היא אנליטית או הרמונית אם היא גזירה בכל D .

דוגמה - $f = \text{const}$, $f(z) = z$, $f(z) = z^n$

לענה - $f(z) = \bar{z}$, $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ אינה גזירה בכל נקודה.

הוכחה - צב' שאין הגבלה:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}$$

אם $h \rightarrow 0$ מהכיוון הממשי, $\frac{\bar{h}}{h} \rightarrow 1$
 אם $h \rightarrow 0$ מהכיוון המרוכב, $\frac{\bar{h}}{h} \rightarrow -1$

לענה - גזירות $\rightarrow$ רציפות.

הוכחה - לכל h קטן מספיק

$$|f(z_0+h) - f(z_0)| \leq C \cdot |h|$$

תכונות רגילות

- $(cf)' = cf'$
- $(f+g)' = f' + g'$
- $(f \cdot g)' = f'g + g'f$
- אם $g(z) \neq 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

קובעה - פונקציות הם הרמוניות, ידם פונ' רציפות (חיזוק של פוסטמס) בכל מקום בו הן משנות.

כלל השרשרת - g גזירה ב- z , f גזירה ב- $w = g(z)$.
 $f \circ g$ גזירה ב- z ו- $f'(g(z)) \cdot g'(z)$

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$$

"הוכחה" -

$$\frac{f(g(z+h)) - f(g(z))}{h} = \frac{f(g(z+h)) - f(g(z))}{g(z+h) - g(z)} \cdot \frac{g(z+h) - g(z)}{h}$$

משוואות קושי-רימן

תכונות - $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה בעלת נגזרת ב- z_0 :
$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

נמצא את הקשר בין נגזרת מרוכבת של פונקציה ממשית ב- $\mathbb{R}^2$.

נניח f פונקציה במרחב המרוכב ב- $z = x + iy$

נכתוב - $u, v: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$

נקח $h \rightarrow 0$ בציר x ובציר y .

בציר x - $h = k \xrightarrow{k \in \mathbb{R}} 0$

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{u(x+k, y) + i \cdot v(x+k, y) - u(x, y) - i \cdot v(x, y)}{k} =$$

$$= \frac{du}{dx} \Big|_z + i \frac{dv}{dx} \Big|_z \quad \left(\begin{matrix} u_x, v_x \\ \text{מטריקס גרדיינט} \end{matrix} \right)$$

בציר y - $h = il, l \xrightarrow{l \in \mathbb{R}} 0$

$$f'(z) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{f(z+il) - f(z)}{il} = \frac{1}{i} \left[\lim_{l \rightarrow 0} \frac{u(x, y+l) + i \cdot v(x, y+l) - u(x, y) - i \cdot v(x, y)}{l} \right] =$$

$$= \frac{1}{i} [u_y + i \cdot v_y] = v_y - i u_y$$

משוואות קושי-רימן $\rightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

מסקנה - אם f פונקציה בעלת נגזרת ב- z אז קיימת פונקציה קרמור

אם f פונקציה בעלת נגזרת ב- z , ונכתוב שיש לה קרמור עינארי, אז קרמור זה חייב להיות מהצורה:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

לכן - אם קיימות ורציפות u_x, u_y, v_x, v_y המקיימות את משוואות ק-ר ב- z , אז f פונקציה בעלת נגזרת ב- z .

הוכחה - נכתוב $z = x + iy$, $h = k + il$, $k, l \in \mathbb{R}$, ונניח $h \rightarrow 0$ ($k, l \rightarrow 0$)

$$u(x+k, y+l) - u(x, y) = \underbrace{u_x}_{\alpha} \cdot k + \underbrace{u_y}_{\beta} \cdot l + \epsilon_1, \quad \epsilon_1 = o(|h|)$$

$$v(x+k, y+l) - v(x, y) = \underbrace{v_x}_{-\beta} \cdot k + \underbrace{v_y}_{\alpha} \cdot l + \epsilon_2, \quad \epsilon_2 = o(|h|)$$

$$f(z+h) - f(z) = \alpha k + \beta l + i(-\beta k + \alpha l) + \epsilon_1 + \epsilon_2 =$$

$$= k(\alpha - i\beta) + i l(\beta + i\alpha) + \epsilon_1 + \epsilon_2 =$$

$$= (\alpha - i\beta)k + i l(\alpha - i\beta) + \epsilon_1 + \epsilon_2 =$$

$$= (\alpha - i\beta)(k + il) + \epsilon_1 + \epsilon_2 = (\alpha - i\beta) \cdot h + \epsilon_1 + \epsilon_2$$

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \alpha - i\beta$$

תרשלו - חוכות ו- $f(z) = \sqrt{x \cdot y}$ אינה גזירה ברשמים, $C-R$ שחקיימת

מסקנות מקום - רמז

משפט 1 - D הוא תחום. אם $f(z) = 0$ $\forall z \in D$, אז f קבועה על D . הומומורפיות.

משפט 2 - $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ תחום D , אם $f_m(f)$, $f_e(f)$, אז f קבועה על D . הומומורפיות.

קובעה - אם $f(z) = 1 + i \cdot u(z)$ ו- v לא קבועה, אז לפי משפט 2, f אינה הומומורפית.

שמה - אם $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה במקום, החדשים, $u_x(z) = u_y(z) = 0$, אז u קבועה.

הוכחה - תהיה $z, z_2 \in D$. נבחר $u(z_1) = u(z_2)$. נבחר u קבועה על D . $f(t) = u(x+t, y)$, $f'(t) = 0 = u_x(x+t, y)$.

הוכחנו שבין $z, z_2 \in D$ יש מסלול γ ש- u קבועה עליו. $u(z_1) = u(z_2)$ עפ"כ.

הוכחה 1 - $f'(z) = 0$ $\iff \begin{cases} u_x = 0 \\ v_x = 0 \\ u_y = 0 \\ v_y = 0 \end{cases} \iff u, v$ קבועות.

הוכחה 2 - נניח $u = \operatorname{Re}(f) = \operatorname{const}$ $\iff \forall z. u_x = u_y = 0$ $\iff u, v$ קבועות.

נניח אם $\operatorname{Im}(f)$ קבוע.

אם $|f| = \operatorname{const}$, סלואר $\forall z \in D. u^2 + v^2 = \operatorname{const}$.
אם $\operatorname{const} = 0$, סיימו כי $f = 0$.
אם $\operatorname{const} > 0$, נגזר את המשוואה ב- x ו- y :

$$\begin{cases} 2u \cdot u_x + 2v \cdot v_x = 0 \\ 2u \cdot u_y + 2v \cdot v_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u \cdot u_x - v \cdot u_y = 0 \\ v \cdot u_x + u \cdot u_y = 0 \end{cases} \quad \text{נציב את } C-R:$$

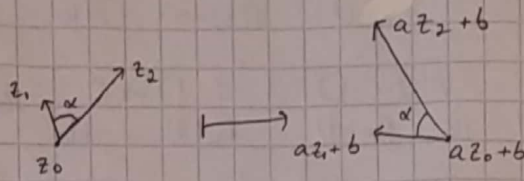
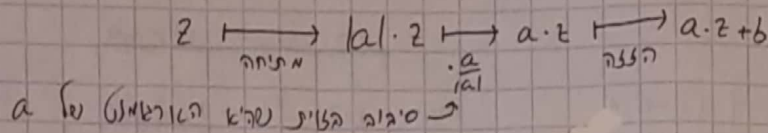
$$\begin{cases} v \cdot u \cdot u_x - v^2 u_y = 0 \\ v u \cdot u_x + u^2 u_y = 0 \end{cases} \quad \text{כפיכך את } v \text{ ב- } u \text{ ו- } u \text{ ב- } v:$$

$$(u^2 + v^2) u_y = 0 \implies u_y = 0 \quad \text{נניח את } v \text{ ב- } u:$$

קיצר מחשבים ומקבלים גם $u_x = 0$, והשמה סיימו.

בנקודת ההומורפיה שממדת צויות

הכונן הלינארית $a, b \in \mathbb{C}$ $z \mapsto a \cdot z + b$



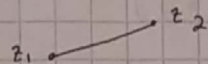
שמירת צויות -

כלומר - צויות בין 2 וקטורים נשמרת תחת ההעתקה.

נראה תכונה דומה בעבור הכונן הלינארית בכל מקום בו $f' \neq 0$

עקומות

הפציה - מסלול $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ כצורה



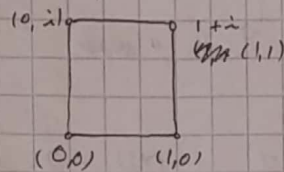
1. קוטר - $t \in [0, 1]$ $\gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2$

2. מעגל נגד כיוון השעון

$t \in [0, 2\pi]$ $\gamma(t) = \cos t + i \sin t$

3. מעגל עם כיוון השעון

$t \in [0, 2\pi]$ $\gamma(t) = \cos t - i \sin t$



4. $\gamma(t) = \begin{cases} t & t \in [0, 1] \\ 1 + (t-1)i & t \in [1, 2] \\ i + 3 - t & t \in [2, 3] \\ (3-t)i & t \in [3, 4] \end{cases}$

הפציה - עקומה נקראת בצורה $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ אם $t_0 \in [a, b]$ הפתח הממשי והמזוהה שלה בצירים, ~~ממשי~~ $\gamma'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$

נקרא לה בצורה אם היא בצורה הכללית.

בצורה ברציפות - בצורה והנגזרת רציפה. (γ')

γ נקראת רגולרית - γ' אם בצורה γ - $\gamma'(t_0) \neq (0)$. $\gamma'(t_0)$ הוא וקטור המהירות שמשיק לעקומה. הכיוון של וקטור זה הוא בדיוק $\text{Arg}(\gamma'(t_0))$

נניח γ - γ' שני עקומות כך ש- $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ ו- $\gamma_1'(t_1) = \gamma_2'(t_2)$ (זה אומר שהן נגזרות זהות). $\alpha = \text{Arg}(\gamma_2'(t_2)) - \text{Arg}(\gamma_1'(t_1))$

נניח $\gamma: D \rightarrow \mathbb{C}$ הומורפיה, γ' עקומה γ - γ' אם $\gamma'(t_0) \neq 0$, אז $\gamma'(t_0) = f'(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)$

אם γ רגולרית γ' - γ' אם $\gamma'(t_0) \neq 0$, אז $\gamma'(t_0) = f'(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)$ וכוון הטיק לעקומה γ הוא:

הסקנה - אם $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ היא פונקציה, $z_0 \in D$, $f'(z_0) \neq 0$ אז f היא איזומורפיזם מקומי בין D ל- $\mathbb{C}$ סביב z_0 .
 כלומר, קיים U סביב z_0 ו- V סביב $f(z_0)$ כך ש- $f|_U: U \rightarrow V$ היא איזומורפיזם.
 אם $f'(z_0) = 0$ אז f אינה איזומורפיזם מקומי ב- z_0 .

הסקנה כזאת (שומרת זווית) נקראת הסקנה קונפורמית.
 האיזומורפיזם והזווית לא $\leftarrow$ קונפורמיות.

משפט עלילס הורדג - $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה אנליטית, $z_0 \in D$, אז:

$$f \text{ שומרת זווית ב- } z_0 \iff f'(z_0) \neq 0$$

הערה - $f(z) = z^2$ בנק' $z=0$, $f'(0)=0$

נסתכל על הזווית בין z ו- $f(z)$: 90° אם $f'(z) = i$, 180° אם $f'(z) = -1$, 0° אם $f'(z) = 1$.
 הסקנה זו לא משמרת זווית (היא מכפילה פי 2).

הסקנות מוביוס

הפזורה - הסקנת מוביוס היא $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$

כאשר $(c, d) \neq (0, 0)$, $ad - bc \neq 0$ (אחרת הפונקציה אינה קבועה).
 אם $z \neq -\frac{d}{c}$ אז $z \neq 0$

(התנאי האחרון נשקל על שיהיה קבועה)

כל הסקנת מוביוס מתאימה למטריצה שצורה מרוכבת $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ כאשר a, b, c, d מקיימים את התנאים.

נסמן $h_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

מסתבר שאם A, B מטריצות כאלה, אז $h_A \circ h_B = h_{A \cdot B}$ (כאן $\cdot$ מכונה כפל מטריצות).

ואכן $h_A^{-1} = h_{A^{-1}}$ (כאן $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ הפיכה).

אולם כל הסקנות המוביוס הן קבוצה עם פעולות ההרכבה, ואינן יחידה $h(z) = z$.

הטלה סטריאוגרפית

נניח $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ כמעט $\mathbb{R}^3$ $\{z \in \mathbb{R}^3 \mid z=0\}$ ונתאם

$$S^2 = \{z \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

כל נקודה $z \in \mathbb{R}^2$ בוחג עם הקוטב הצפוני $(0,0,1)$ קובעת ישר יחיד ב- $\mathbb{R}^3$ ונקודת החיתוך של ישר זה (שאינה $(0,0,1)$) עם S^2 נסמן ב- (x, y, z) .

הפזורה הסקנת $\mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ $z \mapsto (x, y, z)$



הסקנה זו היא חזרה, ואם נקבל את הטלה הסטריאוגרפית.

ניסוח מפורש: אם $z = (x, y)$ הקו הנושר בין z ל- $(0,0,1)$ הוא $(tx, ty, 1-t)$ כאשר $0 \leq t \leq 1$.

כדי שהנקודה $(tx, ty, 1-t)$ תהיה על S^2 (ברור שכן) נכתב סגרים נקב 2 פיתוחות: $(0,0,1) \rightarrow t=0$, $t=1 \rightarrow (x,y,0)$

כלומר - $z \mapsto \left(\frac{2 \operatorname{Re}(z)}{1+|z|^2}, \frac{2 \operatorname{Im}(z)}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right)$

ההצתקה ההפוכה: $(x, y, z) \mapsto \frac{z + iz}{1-z}$

אפיונות

- קו המשוואה $S^2 \longleftrightarrow$ מישור היחידה $D_0(1)$ * נגזיר $\hat{e} = \{ \nu \in \mathbb{C} \mid \nu \cdot \hat{e} = 0 \}$
 המשפחה הסטנדרטית היא חתך
- חצי הכדור הצפוני $\longleftrightarrow D_0(1)$
- $\mathbb{C} \setminus D_0(1) \longleftrightarrow$ הצפוני
- ממשל ספרי (חיתוך של מישור עם S^2) שצמוד בקטע הצפוני $\longleftrightarrow$ קו ישר
- ממשלים ספריים אחרים $\longleftrightarrow$ ממשלים ב- $\mathbb{R}^2$

המרחב הסטנדרטי המרוכב

עמקון ב- $\mathbb{C} = \{ (z_1, z_2) \mid z_1^2 + z_2^2 = 0 \}$ - מרחב וקטורי מרוכב.

נגזיר יחס שקילות על $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ $(z_1, z_2) \sim (w_1, w_2) \iff \exists \lambda \neq 0 \text{ s.t. } (z_1, z_2) = \lambda(w_1, w_2)$

ק"ם מחלקת השקילות היא המרחב הפחיתוני המרוכב, נסמנו ב- $\mathbb{CP}^1$
 מחלקת שקילות היא "קו מרוכב" או תת מרחב ליניארי על $\mathbb{C}^2$ כעומד: $\{ z_1 = az_2 \mid a \in \mathbb{C} \}$ כל שכן.

ניווכח שיש הסתקה חתך ואלו $\hat{e} \rightarrow \mathbb{CP}^1$
 תהי $\mathbb{CP}^1 = \{ (z_1, z_2) \mid z_1^2 + z_2^2 = 0 \}$ אם $z_2 \neq 0$ $\varphi([z_1, z_2]) = \frac{z_1}{z_2}$
 אם $z_2 = 0$ $\varphi([z_1, 0]) = \infty$

על $\mathbb{CP}^1$ יש הסתקות ליניאריות הנחשבות ע"י מטריצות $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
 כל הסתקה כזאת שיהא הפיכה מצביחה תת מרחב ממ"מ 1
 אלת מרחב ממ"מ 1. $A(z_1, z_2) = A(w_1, w_2)$ אם $(z_1, z_2) = \lambda(w_1, w_2)$
 ואכן $A(z_1, z_2) \sim A(w_1, w_2)$ וזה אמת.

כלומר, A מצביחה ההסתקה הפיכה מ- $\mathbb{CP}^1$ ל- $\mathbb{CP}^1$.

כלומר - $[A]: \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$, $P = [z_1, z_2] \in \mathbb{CP}^1$ ע"י:

$$[A](P) = [A(z_1, z_2)] \in \mathbb{CP}^1$$

ההצתקה מוצגת היטב והפיכה לפי התכונות הנ"ל.

$$\hat{\mathbb{C}} \xrightarrow{\varphi^{-1}} \mathbb{CP}^1 \xrightarrow{[A]} \mathbb{CP}^1 \xrightarrow{\varphi} \hat{\mathbb{C}}$$

ק'בנאן העתקות :

אם $z \in \mathbb{C}$:

$$A(z) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az+b \\ cz+d \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} \frac{az+b}{cz+d}$$

$$A(1) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} \frac{a}{c} = \begin{cases} \frac{a}{c} & c \neq 0 \\ \infty & c = 0 \end{cases}$$

$$\phi_A: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

עבור כל A של $\mathbb{C}$, ק'בנאן העתקות המאמצות ע"י :

$$\phi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\phi_A(\infty) = \frac{a}{c} = \begin{cases} \frac{a}{c} & c \neq 0 \\ \infty & c = 0 \end{cases}$$

מכאן נסך שכל A_1, A_2 הן עתקי העתקות ע"י נאיות הפיכות על $\mathbb{C}^2$:

$$\phi_{A_1} \circ \phi_{A_2} = \phi_{A_1 A_2}$$

הערה
משוואות

תכונות העתקות מבי'ס

$$h'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0, \quad h(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (1)$$

כלומר, $h' \neq 0$ בכל נקודה בה h מאמצת.

(2) נ"ך העתקת של העתקות מבי'ס :

לענין-אם $A \neq I$, אז מספר נקודות העתקת הוא 1 או 2 (ב- $\hat{\mathbb{C}}$)

הוכחה - אם $c=0$ אז $h(z) = \frac{a}{c}z + \frac{b}{c}$ וכל z נ"ך עתקת אחרת ב- ∞ אם $c \neq 0$ אז z היא נ"ך עתקת אחרת $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ שזה שקו"ל ע"י ופז' י"ט לכל היותר 2 פתרונות.

(3) 3 נ"ך קובעות את העתקת מבי'ס

משפט - $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$, $w_1, w_2, w_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ אז קיימת יחידה h מבי'ס כך ש-
 $i=1,2,3$, $h(z_i) = w_i$

הוכחה - יחידות: אם h_1, h_2 מקיימות זאת אז $h_1^{-1} \circ h_2$ היא העתקת מבי'ס עם 3 נקודות עתקת, לפי ה"ש הנבחרת: $h_1 = h_2$

קיום: נבחר עיבור מקרה פרטי בו $w_1 = \infty, w_2 = 0, w_3 = 1$ (לפי h ע"י):

$$h(z) = \begin{cases} \frac{(z-z_2)(z-z_3)}{(z-z_1)(z_2-z_3)} & z_1, z_2, z_3 \neq \infty \\ \frac{z-z_2}{z_3-z_2} & z_1 = \infty \\ \vdots & \\ \uparrow & z_{j,2} = \infty \end{cases}$$

הערה: h מבי'ס

בנק ציור של פונקציות אנליטיות

הצגה - $y \in \mathbb{R}$ $\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$ $\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$

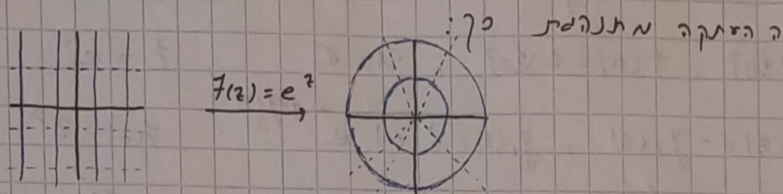
$e^z (\cos y + i \sin y) = e^x \cdot e^{iy} = e^z$ $z = x + iy$ e^z ערך

נוסחה - $\forall z \in \mathbb{C} \quad e^z \neq 0$ (1)

$\forall z_1, z_2 \quad e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$ (2)

$e^{z_1 - z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$ (3)

$\forall z \in \mathbb{C} \quad e^{z + 2\pi i} = e^z$ - כמות $2\pi i$ מחזור (4)



לצורה - $f(z) = e^z$ f פונקציה אנליטית

$e^{x+iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$
 $u(x,y) \quad v(x,y)$
 הוכחה -

$v_y = e^x \cos y = u_x, \quad -v_x = -e^x \sin y = u_y$

ועל כן, הפונקציה f מקיימת את $C-R$ תנאים.

בנוסף - $e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y = u_x + i v_x = (e^z)'$

(א) e^z היא הפונקציה האנליטית על $\mathbb{C}$ (ב) e^z היא הפונקציה האנליטית על $\mathbb{R}$ - $\mathbb{R}$

הצגה - $\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ $\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

הפונקציות $\sin$ ו- $\cos$ הן $\mathbb{R}$ - אנליטיות

תוצאות - $\sin, \cos$ מקיימות את $C-R$ תנאים

$\forall z \in \mathbb{C} \quad \sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$

$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$

$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$

לוגריתם - $w \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$ $e^z = w$ $z = \ln|w| + i \arg(w)$ $z = x + iy$ $K \in \mathbb{N}$ $z = 2\pi i K$

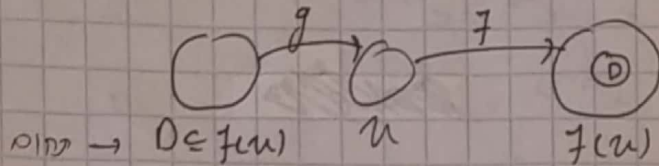
לוגריתם - $\text{Log}(z) := \ln|z| + i \text{Arg}(z)$ $\text{Log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$

$e^{\text{Log} z} = e^{\ln|z|} \cdot e^{i \text{Arg}(z)} = z$

$\log$ חציפה יק - $\mathbb{C} \setminus [-\infty, 0]$
 נגזיר כי $\log$ היא "ענף" של $(e^z)^{-1}$ - $\mathbb{C} \setminus [-\infty, 0]$

ענפים של פונקציה הולומורפית

$g: D \rightarrow \mathbb{C}$ פתוחה, $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ פתוחה, $D \subseteq f(\mathbb{C})$



העברה - g הפוכה יחידה - f אם $f(g(z)) = z$ $\forall z \in D$

דוגמאות - 1. $f = e^z$, $U = \mathbb{C}$, $f(U) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $g(z) = \log(z)$

2. $f(z) = z^2$, $g_1(z) = \sqrt{|z|} e^{i \frac{\arg(z)}{2}}$, $g_2(z) = -g_1(z)$

העברה - $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ פתוחה, $D \subseteq f(U)$ תחום "ענף" של f^{-1} - D היא פונ' $g: D \rightarrow U$ הפוכה יחידה של f , ורציפה.

סדרות - $\log$ בתחום $\mathbb{C} \setminus [-\infty, 0]$, g_1, g_2 בתחום $\mathbb{C} \setminus [-\infty, 0]$

טענה - $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית, g ענף של f^{-1} - $D \subseteq f(U)$ תהא

אם $f'(w_0) \neq 0$ אז g חציפה ב- $z_0 \in D$ ו- $w_0 = g(z_0) \in U$
 $g'(z_0) = \frac{1}{f'(w_0)}$ ונתקיים

סיבה - נסמן $g(z_0) = w$, $f(w) = z$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{w - w_0}{f(w) - f(w_0)} = \frac{1}{f'(w_0)}$$

↑
רציפות f, g

טענה - אם L ענף של $(e^z)^{-1}$ - D היא ישר ישר D - $L(z) = \log(z) + 2\pi i k$ - $k \in \mathbb{Z}$ (כפי'ך, $\log|z| + i[\arg(z) + 2\pi k]$)

סיבה - עבור L כזו, מהטענה, $L'(z) = \frac{1}{e^{L(z)}} = \frac{1}{z}$, אך $\log'(z) = \frac{1}{z}$
 $\forall z \in D, (L - \log)'(z) = 0$

כן ממטפט שהוכחנו, $L - \log \equiv c$, $\forall w \in D$
 $1 = \frac{e^{L(z)}}{e^{\log(z)}} = e^{L(z) - \log(z)}$

והכן קיים $k \in \mathbb{Z}$ - $c = 2\pi i k$

ענפים של שורש P

$P \geq 2$ מס' טבעי, $f(z) = z^P$

צומת ענף - $g(z) = \sqrt[P]{|z|} \cdot e^{\frac{i \text{Arg}(z)}{P}}$

$D = \mathbb{C} \setminus [-\infty, 0]$ בתחום $(z^P)^{-1}$ של f הפוכה יחידה ונגזרת

נבחין - $z \neq 0 \iff f'(z) \neq 0$ ופסים $f'(z) = Pz^{P-1}$
 מס' אום g ענף ב-0, g חסומות:

$$g'(z) = \frac{1}{f'(g(z))} = \frac{1}{P(g(z))^{P-1}} = \frac{g(z)}{P(g(z))^P} = \frac{g(z)}{Pz}$$

מענה - נניח $g: D \rightarrow \mathbb{C}$ (פונקציה של $(z^P)^{-1}$)

אין קיימים בצירוק P ענפים שונים חסומות של שורש P ב-0
 וכלם מהצורה $g_0, g_1, \dots, g_{P-1}$ כע- $g_0, g_1, \dots, g_{P-1}$ הם P ענפים
 היחידה מסדר P

הוכחה - ברור כי g_i הינה ענף חסומותי ענף $i=0, \dots, P-1$,
 כיוון ש-

$$f(g_i(z)) = [g_i(z)]^P = z$$

יהי h ענף חסומותי של שורש P . $\forall z \in D, h(z)^P = z$
 נבחר מניח הצבים ונקבע:

$$P \cdot h(z)^{P-1} \cdot h'(z) = 1$$

עפ"כ, $h'(z) = \frac{1}{P h(z)^{P-1}}$, וכיוון ש- h חסומותי נובע כי $h(z) \neq 0$ $\forall z \in D$.

$$\forall z \in D, l(z)^P = \frac{h(z)^P}{g(z)^P} = 1 \quad \text{אם} \quad l(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$$

מכאן ש- $\forall z \in D, l(z) = \xi_0, \dots, \xi_{P-1}$

ל h ציפה בתחום קטור ענף $i=0, \dots, P-1$ כך ש- $h(z) = \xi_i$
 ענף $h = g \cdot \xi_i$ $\forall z \in D$

ענפים של חזקת g : $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$, ונניח ש- L הוא
 ענף של $(z^2)^{-1}$ (ענף של Log).
 $z^2 := h_{2,L}(z) = e^{2L(z)}$ (נצייר)

הגדרה - תהא $\{c_n\}$ סדרת מס' מרוכבים. הסדרה $S_n = \sum_{k=0}^n c_k$ מתכנסת, אומרת מתכנסת הטור $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ מתכנס אומרת.

קריטריון קושי - $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ מתכנס אומרת אם ורק אם לכל $\epsilon > 0$ קיים N כזה שכל $n, m > N$ מתקיים:

$$\left| \sum_{k=m}^n c_k \right| < \epsilon$$

תרשים - אם $|c_n| < 1$ אז $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^n = \frac{1}{1-c}$, אם $|c| \geq 1$ אז $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^n$ מתכנס.

התכנסות בהחלט - נאמר ש- $\sum c_k$ מתכנס בהחלט אומרת $\sum |c_k|$ מתכנס. + התכנסות בהחלט אומרת התכנסות.

התכנסות במ"ש - $\{g_n\}$ סדרת פונקציות מרוכבות $g_n: S \rightarrow \mathbb{C}$. הסדרה מתכנסת במ"ש על S אומרת קיימת $g: S \rightarrow \mathbb{C}$ כך ש-

$$\sup_{z \in S} |g_n(z) - g(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

או: לכל סדר קיים M כזה שכל $n \geq M$ ולכל $z \in S$:

$$|g_n(z) - g(z)| < \epsilon$$

דוגמה - $\{z^n\}$ מתכנסת במ"ש ב- $D_0(\frac{1}{2})$ אבל לא ב- $D_0(1)$.

הגדרה - $\{g_n\}$ מתכנס במ"ש מקומית על קב' פתוחה G אם לכל $z \in G$ יש סדר n כזה ש- $\{g_n\}$ מתכנסת במ"ש ב- $D_z(\epsilon) \subset G$.

דוגמה - $\{z^n\}$ מתכנסת מקומית ב- $D_0(1)$.

הגדרה - טור הפונקציות $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ מתכנס במ"ש מקומית על G אם לכל f_n מוגדרת על G , והסכומים $S_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z)$ מתכנסים במ"ש (מקומית) על G .

קריטריון וייטשטראס (M-בוקן) - $f_n: S \rightarrow \mathbb{C}$, $M_n \in \mathbb{R}$, $|f_n(z)| \leq M_n$ ו- $\sum_{k=0}^{\infty} M_k < \infty$ מתכנס, אז $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ מתכנס במ"ש על S לכל $z \in S$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, \quad z_0 \in \mathbb{C}, \quad a_k \in \mathbb{C}$$

הגדרה - נאמר ש- $R \in [0, \infty]$ הוא רדיוס ההתכנסות של טור חזקות אומרת $\frac{1}{R} = \lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k}$. נניח בה"כ מעניין כי $z_0 = 0$.

משפט - יהי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ אזי:

- (1) הטור מתכנס בהחלט מקומית ב- $D_0(R)$
- (2) אם $|z| > R$ אז $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k z^k| = \infty$
- (3) ב- $D_0(R)$ אם נגזיר $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ אז $f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$

הוכחה ארוכה, להפסיק יום אחד

תכונות אינטגרל

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ קצובה

$$\int_a^b \gamma(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re} \gamma(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} \gamma(t) dt$$

תכונות:

- אינאריות
- ניוטון-לייבניץ

$$\left| \int_a^b \gamma(t) dt \right| \leq \int_a^b |\gamma(t)| dt$$

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

קצובה

אינטגרל מרוכב

הצגה:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

תכונות האינטגרל:

$$\int_{\gamma} (c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z)) dz = c_1 \int_{\gamma} f_1(z) dz + c_2 \int_{\gamma} f_2(z) dz$$

אם $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ מסלול חלקי, f פונקציה רגולרית, $a < c < b$, $\gamma_1 = \gamma|_{[a, c]}$, $\gamma_2 = \gamma|_{[c, b]}$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

• בקלות נראה ש- $\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$ כאשר $-\gamma(t) = \gamma(b+a-t)$

$$(-\gamma)'(t) = -\gamma'(b+a-t)$$

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$$

הוכחה - לפי הצורה + החלפת משתנים

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt$$

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \leq \sup_t |f(\gamma(t))| \cdot \operatorname{Len}(\gamma) \quad \text{מסקנה}$$

קצובה

• γ קבוצה פתוחה, F פונקציה רגולרית ב- γ , $F'(z) = f(z)$, $\gamma: G \rightarrow \mathbb{C}$ ש- $\gamma \subset G$ ונניח $f \in C^1(\gamma)$

$$\int_{\gamma} f dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \quad (\text{ניוטון-לייבניץ})$$

$$\int_{\gamma} f dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt =$$

סיבה -

$$\int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

↑ ניוטון-לייבניץ

$$\int_{\gamma} dz = \int_a^b \gamma'(t) dt = \gamma(b) - \gamma(a)$$

זוגמאות - א

$$\int_{\gamma} z dz = \int_a^b \gamma(t) \gamma'(t) dt = \int_a^b \frac{1}{2} (\gamma^2(t))' dt = \frac{1}{2} [\gamma^2(b) - \gamma^2(a)]$$

ב

מסקנה - אם $F: G \rightarrow \mathbb{C}$ חלומרפית ו- $F' = f$ כיכרה ו- γ מסלה סגורה $\gamma(a) = \gamma(b)$ אז $\int_{\gamma} f dz = 0$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\gamma(t) = e^{-it} \text{ (מעגל נגזר מן השטח)}, f(z) = \frac{1}{z}$$

זוגמאות - ג

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} e^{-it} \cdot i e^{-it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

מסקנה - אין $\frac{1}{z}$ קבוצה $D_0(1)$

* אם יש מסלה בקבוצה קטן יותר $\gamma(t) = ze^{it}$, האינטגרל ישאר $2\pi i$

מסקנה - אם $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ סדר $D_0(R)$ מתבטא $\int_{\gamma} f dz = 0$, אז כל מסלה סגורה $\gamma \subset D_0(R)$

$$F = a_0 z + a_1 \frac{z^2}{2} + a_2 \frac{z^3}{3} \dots$$

סדר זה אותו כזוים התבטא R

$F' = f$ חלומרפית ב- $D_0(R)$ ומסלורה אינה אקרה

מסקנה - (מתכנה 4) אם $f_n \rightarrow f$ במובן של מסלורה אז $\int_{\gamma} f_n \rightarrow \int_{\gamma} f$

$$|\int_{\gamma} f_n - \int_{\gamma} f| = |\int_{\gamma} (f_n - f) dz| \leq \int_{\gamma} |f_n - f| dz \leq \sup_{z \in \gamma} |f_n(z) - f(z)| \cdot \text{Len}(\gamma)$$

רה - פרמטריזציה

יהי $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ חלקה י' סמקטעין

הוא $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ רה - פרמטריזציה של γ אם קיימת $\beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ חת'ה ויה, עולה, וחלקה י' סמקטעין, ו- $\gamma = \beta \circ \gamma$

(γ ו- β בחלק אותה תמונה, ועם מתארת אותו מסלול אך בקצב שונה)

$$\int_{\gamma} f = \int_{\beta \circ \gamma} f$$

מסקנה -

$$\int_{\gamma} f dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt =$$

סיבה -

$$= \int_a^b f(\gamma(\beta(s))) \gamma'(\beta(s)) \beta'(s) ds = [s = \beta(t)] =$$

$$= \int_a^b f(\gamma(s)) \gamma'(s) ds = \int_{\gamma} f dz$$

תרגיל - אורך עקומה אינו משתנה תחת רה - פרמטריזציה

זכ קנס:

↑

משפט - העלה של Goursat
 אם קבוצה פתוחה. $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ הולמורפית. D משולש שמוכל בול- G .
 אז נסמן γ את מסלול המפה של D נגד כיוון השעון.
 אזי:

$$\int_{\gamma} f dz = 0$$

הוכחה - נסמן $I := \int_{\gamma} f dz$ $I = 0$ לכל D .

נבנה 4 משולשים $T_{0,j}$ $j=1,2,3,4$ ע"י סימון 3 נק' אמצע של צלעות D וחיבורן בקו ישר ונקבא.

$$\int_D f dz = \sum_{j=1}^4 \int_{\partial T_{0,j}} f dz$$

כיוון שכל צלע פנימית משולש, האינטגרל שלה בקו ישר הוא 0 + וסמך מסמן -

ע"י ש j עבורו $\int_{\partial T_{0,j}} f dz \neq 0$ מקסימלי כך n $|\int_{\partial T_{0,j}} f dz| \geq \frac{1}{4} |I|$

נסמן $T_1 = T_{0,j}$ δ - היתאים.

נשים לב שמדימון משולשים, $\frac{1}{2} \text{Len}(\partial T) = \frac{1}{2} \text{Len}(\partial T_1)$

$\text{Len}(\partial T_2) = \frac{1}{2} \text{Len}(\partial T_1)$ ונקבא T_2 באותו אופן, ונקבא T_1 -

$$|\int_{\partial T_2} f dz| \geq \left(\frac{1}{4}\right)^2 |I|$$

נמשיך כך ונקבא סדרת משולשים $\{T_n\}$ הקטנים יותר.

$$\text{Len}(T_n) = \frac{1}{2^n} \text{Len}(T_0)$$

$$|\int_{\partial T_n} f dz| \geq \frac{|I|}{4^n}$$

- T_n מקומות יחסיים, ואכן יש $z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$

$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + E(z)$ נניח z_0 הוא המרכז, ע"כ נניח

$$E(z) := f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{E(z)}{z-z_0} = 0$$

(משוואות)

יהי T_n משולש סביב z_0 (נחשב):

$$\int_{\partial T_n} f dz = \int_{\partial T_n} f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + E(z) dz$$

$$|I| \leq 4^n \left| \int_{\partial T_n} E(z) dz \right|$$

$$\epsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\epsilon_n := \sup_{z \in \partial T_n} \frac{|E(z)|}{|z-z_0|}$$

$$\forall z \in \partial T_n, |E(z)| \leq \epsilon_n \cdot |z-z_0| \leq \epsilon_n \text{Len}(\partial T_n) = \epsilon_n \cdot \frac{1}{2^n} \text{Len}(\partial T_0)$$

$$|I| \leq 4^n \cdot \text{Len}(T_n) \cdot \epsilon_n \cdot \text{Len}(\partial T_n) = 4^n \cdot \frac{\text{Len}(\partial T_0)^2}{2^n \cdot 2^n} \cdot \epsilon_n$$

$$I = 0$$

$\gamma \subset G$ מסלול, $f \in \text{Hol}(G)$ פונקציה אנליטית, $F' = f$, $F = \int f$
 $\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

Goursat: $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה אנליטית, $T \subset G$ תחום קטן.
 $\int_T f dz = 0$

הצגה: G תחום ישרי, T תחום קטן, $z_1, z_2 \in G$ כלים, $\forall t \in [0,1]$
 $\gamma(t) = z_1 + (t - z_1)z_2 \in G$

$G = D_z(R)$ - פתח

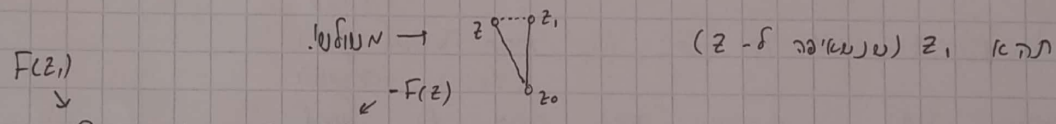
משפט קטן: $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה אנליטית, γ סגור, $\int_\gamma f dz = 0$

$\int_\gamma f dz = 0$

הצגה: G תחום ישרי, $f \in \text{Hol}(G)$, $F' = f$

הוכחה: $z_0, z_1 \in G$, $\gamma(t) = z_0 + (t - z_0)z_1$, $t \in [0,1]$

$F(z) = \int_{[z_0, z]} f(\xi) d\xi$
 $F'(z) = f(z)$



$F(z) - F(z_1) = \int_{[z_1, z]} f(\xi) d\xi$

$\frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} - f(z_1) = \frac{1}{z - z_1} \int_{[z_1, z]} (f(\xi) - f(z_1)) d\xi$

נבחר $\delta > 0$ כך ש- $|f(\xi) - f(z_1)| < \delta$ עבור $|\xi - z_1| < \delta$

$\left| \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} - f(z_1) \right| \leq \frac{\delta |z - z_1|}{|z - z_1|} = \delta$

$\lim_{z \rightarrow z_1} \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} = f(z_1)$



כלומר f היא פונקציה אנליטית ב- z_1

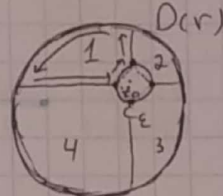
משפט - נניח ש- $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ היא פונקציה, G תחום קושר, $D(r) \subset G$

$$\forall z_0 \in D(r) \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi$$

(כאן γ היא מעגל ברדיוס r סביב z_0)

הוכחה - יהי C_ϵ מעגל ברדיוס ϵ סביב z_0 כך ש- $C_\epsilon \subset D(r)$

$$(*) \quad \int_{D(r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi = \int_{C_\epsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi$$

הסבר -  קיבלנו 4 תחומים קושרים. האינטגרל של כל אחד מהם הוא 0. האינטגרל של כל אחד מהם הוא 0. האינטגרל של כל אחד מהם הוא 0.

הוכחה פרמטית - נקבע $z_0 \in D$ יהי C_ϵ המעגל $\{z \mid |z - z_0| = \epsilon\}$ נניח ש- ϵ קטן מספיק כך ש- $C_\epsilon \subset D$.

נבחר את 4 נקודות, z_1, z_2, z_3, z_4 נמצא על C_ϵ . נחבר אותם בקווים ישרים. D - סמכות בצורה נבחרת 4 מסילות $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$. נקבל:

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi + \int_{\gamma_2} \dots + \int_{\gamma_3} \dots + \int_{\gamma_4} \dots \quad (*)$$

$$\rightarrow \int_{D(r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi - \int_{C_\epsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi$$

$$= 0$$

כאן $\int_{C_\epsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi$ מה?

צריך למצוא תחום קושר G כך ש- $z_0 \in G$ ו- $1 \rightarrow \xi \mapsto \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}$ היא פונקציה אנליטית ב- G . למשל, G מוכלת בתחום קושר G והתחום הוא חצי מעגלית D' (המחצית העליונה של D ו- D' סגורה בצד ימין). זה מוכיח את (*).

$$\int_{C_\epsilon} \frac{1}{\xi - z_0} d\xi = 2\pi i$$

חישובנו

$$\int_{C_\epsilon} \frac{f(\xi) - f(z_0)}{\xi - z_0} d\xi = 2\pi i f(z_0)$$

כאן

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\epsilon} \frac{f(\xi) - f(z_0)}{\xi - z_0} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\epsilon} \frac{f(\xi) - f(z_0)}{\xi - z_0} d\xi$$

כאן

$$\lim_{\xi \rightarrow z_0} \frac{f(\xi) - f(z_0)}{\xi - z_0} = f'(z_0)$$

יוצאים ש-

הוכחה

$$M_\epsilon = \sup_{\xi \in C_\epsilon} \left| \frac{f(\xi) - f(z_0)}{\xi - z_0} \right| \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} |f'(z_0)|$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\epsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi - f(z_0) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \epsilon \cdot M_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

כאן $(*)$

(מציג ממשלה מופיע ϵ עקרוני שווה 0).

משפט הערך הממוצע

במשפט של מנשה קושי.

נניח ש- $D_{z_0}(r)$ מוכל בתחום בו f חלומורפית.
נוסחת קושי:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{z_0}(r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta \quad (*)$$

כאשר המסלול הנו $t \in [0, 2\pi]$

$$\gamma(t) = z_0 + r e^{-it}$$

$$\gamma'(t) = r e^{-it} \cdot i$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{עפי' הצבה} \quad (*) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))}{r e^{-it}} r e^{-it} \cdot i dt = \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) dt \end{aligned}$$

מטרה - אם f חלומורפית, גם f' חלומורפית, ו- f יש פיתוח טיילר.

אינטגרל קושי (גרסה ברורה יותר בעמוד הבא)

עמדה - יהי $\phi: D \rightarrow \mathbb{C}$ מסלול חלקי ϕ למקוטעין (לאו דווקא סגור)
 1- $\phi: \gamma \rightarrow \mathbb{C}$ יציבה
 נגזרת את האינטגרל קושי של ϕ כפונקציה

$$F(z) = \int_{\gamma} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$$

אם F חלומורפית ה- γ ו- ϕ ובלתי-סגורה, אזי F סגור -1

$$F^{(n)}(z) = n! \int_{\gamma} \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

מכאן, אסמך עפיה את F כטור חזקות סביב $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$
 בהקדום התבוננתי $\delta = \text{dist}(z_0, \gamma)$

הצגה - נוסחת קושי מראה שגם ϕ חלומורפית ו- γ מסלול חלקי כוון הנסיון
 כש- ϕ חלומורפית בתוך המעגל ובמפתחו ו- $F(z) = 2\pi i \cdot \phi(z)$
 ומתקבלת נוסחה ש- ϕ אזיבה מכל סביבה, ויש לה טור טיילר.

הוכחה - נבחר $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ ו- $\delta = \text{dist}(z_0, \gamma)$
 נקח z שתיקיים $|z - z_0| < \delta$ ו- $\zeta \in \gamma$
 אז $\delta < |\zeta - z_0|$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

טור מתכנס בהתאם לטענה של $\delta < |\zeta - z_0|$

הצברה - $\{f_n\}$ מתכנסת במישור SCD אם f אם $\sup_{z \in S} |f_n(z) - f(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

- אם S היא עקומה γ ו- $f_n \rightarrow f$ במישור SCD אז $\int_\gamma f_n \rightarrow \int_\gamma f$

אזריס - $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(z)$ מתכנס במישור SCD אם $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(z)$ אם $\sup_{z \in S} |G(z) - \sum_{n=0}^N g_n(z)| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$

אם S עקומה γ , אז $\sum_{n=0}^N \int_\gamma g_n(z) dz \rightarrow \int_\gamma G(z) dz$

אחיזקות - נתון $z_0 \in D$ ו- $\sum a_n(z-z_0)^n$ מתכנס. אז $\frac{1}{R} := \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$

נכס בטר $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$

משפט I - (1) אם $z \in D_{z_0}(R)$ הטר מתכנס, ובנוסף מתכנס במישור מקומית ובחזקת (2) אם $R < |z-z_0|$, הטר אינו מתכנס ב- z , ובכוח $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n(z-z_0)^n| = \infty$

ב- $D_{z_0}(R)$, f הולמומורפית ו- $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n(z-z_0)^{n-1}$

סקנה - $f^{(n)} \in Hol(D_{z_0}(R))$ ו- $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

קזמרה - $z \in B_0(\alpha)$, $\alpha < 1$. מתכנס במישור ב- $B_0(z)$ $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$

סיבה - $|\frac{1}{1-z} - \sum_{n=0}^N z^n| = |\sum_{k=N+1}^{\infty} z^k| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \alpha^k = \alpha^{N+1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \alpha^{N+1} \cdot \frac{1}{1-\alpha} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$

אינטגרל קושי

אם מסתעף חלקה γ סגורה, אז $\oint_\gamma \phi(\xi) d\xi = 0$ כל ϕ רציפה.

$\forall z \in D \setminus \gamma$. $F(z) = \int_\gamma \frac{\phi(\xi)}{\xi - z} d\xi$

משפט II - F הולמומורפית ב- $D \setminus \gamma$. בנוסף, היא נגזרת מסדר n ב- $F^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{\phi(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$

$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ (בנוסף, ניתן להציב את F בטר חזקת בכוח $D_{z_0}(r)$ כש- $r = \text{dist}(z_0, \gamma)$)
 $\inf_{\xi \in \gamma} |\xi - z_0|$

1 - $a_n = \frac{F^{(n)}(z_0)}{n!} = \int_\gamma \frac{\phi(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$

משפט II - γ פונקציה הולמומורפית ב- D . לוח S - $D_{z_0}(r) \subset S$ אם יש פיתוח γ בטר חזקת מהצורה:

$\forall z \in D_{z_0}(r)$. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ יתר על כן, נזהר מתכנסות במישור מקומית ב- $D_{z_0}(r)$.

הוכחת המסקנה מהצורה - מנוסחת קושי, אם $z \in D_{z_0}(r)$ ואז הכל עובד מהצורה: $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{z_0}(r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$

הוכחת העולה
מסביר שהוכחה את המעבר כל תנאי, ואפשר I ייתן את הסבר.

נקבע $z_0 \in \gamma$ ו $|\gamma| < \infty$
נקבע $z \in \gamma$ ו $|\gamma| < \infty$
 $\delta = \text{dist}(z_0, \gamma)$
 $\alpha < \delta$ כך $\alpha = |z - z_0|$

עכשיו $\xi \in \gamma$ מתקיים:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} =$$

כיון ש- $\forall \xi \in \gamma, \forall z \in \gamma, \left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| < \frac{\alpha}{\delta} < 1$ מתקיים:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n \rightarrow \text{זו התכונת הבעה של מ-ביתן של וירטואל (מאמין)}$$

$$\sup_{\xi \in \gamma} \left| \frac{1}{\xi - z} - \sum_{n=0}^N \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} \right| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

$$\sup_{\xi \in \gamma} \left| \frac{\phi(\xi)}{\xi - z} - \sum_{n=0}^N \frac{\phi(\xi)(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} \right| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

(ני $\phi(\xi)$ רציפה ו γ חסומה)

$$\frac{\phi(\xi)}{\xi - z_0} \text{ מתכנס במעלה } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi(\xi)(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}$$

$$F(z) = \int_{\gamma} \frac{\phi(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \underbrace{\int_{\gamma} \frac{\phi(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi}_{a_n}$$

זו התכונת נקודתית עכשיו $z \in D_{z_0}(\delta)$

$$\delta \leq \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \cdot a_n$$

עכשיו נבדוק שהתכונת של סדר המעלה (I) מתקיימת

$$a_n := \int_{\gamma} \frac{\phi(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \frac{F^{(n)}(z_0)}{n!}$$

כמו כן,

$$f^{(n)}(0) = 1, \quad z_0 = 0, \quad f = e^z \quad \text{דוגמה - (1)}$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (z \in \mathbb{C})$$

$$z_0 = 0, \quad f = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{(2)}$$

$$f' = \frac{1}{2i} (ie^{iz} - ie^{-iz}) \Big|_{z=0} = 1$$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & n \text{ זוגי} \\ (-1)^{k/2} & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$f'' = \frac{1}{2i} (-e^{iz} + e^{-iz}) \Big|_{z=0} = 0$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

זו הסיבה שהתכונת של f מתקיימת בכל z .

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

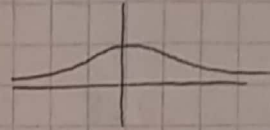
הסיבה שהתכונת של f מתקיימת בכל z .

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

קובצה - 3

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}, \quad x \in (-1, 1)$$



עלמה לא מתכנסת ב-1? כי הפונקציה המרוכבת לא מוגדרת ב- $z = \pm i$.
היא הומומורפית פה ל-2 הנקודות האלה. אבל אין התכנסות בקצות הציר (סביב 0).
אם נחשב התכנסות סביב כל נקודה אחרת, נזוים ההתכנסות יהיה חסום
ע"י 2 הנקודות האלה.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2/2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

4

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{עם זאת, } f^{(n)}(0) = 0$$

סיבה - $f(z) = e^{-z^2/2}$ אינה מוגדרת ב- $z=0$, על אף אפסיות
להשלימה הפונקציה הומומורפית בסביבת 0, על אף פיתוח טיילור סביב 0.

משפט Morera - נניח ש- $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ רציפה וכל מעגל $T \subset G$ $\int_T f dz = 0$.
אז f הומומורפית ב- G . (זהו הפיך של משפט Goursat).

הוכחה - בהי"כ נניח ש- G היא דיסק.
הוכחנו שתחת תנאי המשפט (המשפט שאנחנו עומדים עליו) f פונקציה
קדומה הומומורפית F כך ש- $F' = f$, וסיימנו כי נגזרת של
פונקציה הומומורפית נגזרת בצורה.

מסקנה - $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ רציפה, הומומורפית ב- $G \setminus \{z_0\}$. אז היא הומומורפית
בכל G .

הוכחה - נבדוק את תנאי המשפט Morera.
יהי $T \subset G$ מעגל, נ"ל $\int_T f dz = 0$.



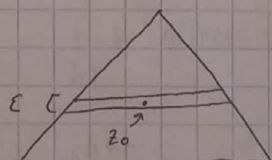
אם $z_0 \notin T$, נאמר שמשפט Goursat אכן $z_0 \in T$.

$$\left| \int_{B_{z_0}(\epsilon)} f \right| \leq \sup_{B_{z_0}(\epsilon)} |f| \cdot \text{len}(\partial B_{z_0}(\epsilon)) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

נקח

$$\int_T f - \int_{B_{z_0}(\epsilon)} f = 0 \quad \text{וממשפט קושי:}$$

תרשם - $I \subset G$ קטע, $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ רציפה, הומומורפית ב- $G \setminus I$.
אז היא הומומורפית בכל G .



* הוכחה נוספת במשפט למסקנה:

אם $f \in \text{Hol}(G)$, $z_0 \in G$, $0 < r < \text{dist}(z_0, \partial G)$, C_r הוא המעגל $|z - z_0| = r$ כיוון השעון
אם r הוא המעגל $|z - z_0| = r$ כיוון השעון
אם r הוא המעגל $|z - z_0| = r$ כיוון השעון

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$$

$$(*) \quad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

ניתן לכתוב את f כסדר טיורי של סביב z_0 בקרבת z_0 :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \rightarrow \text{מתכנס בנקודה הזו}$$

מטען מורסו - אם $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ היא פונקציה אנליטית, $\int_{\gamma} f dz = 0$ לכל מעגל γ סגור.

מטען הערכה של קושי

אם f היא פונקציה אנליטית ב- D , γ מעגל סגור, n מספר טבעי:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|z - z_0| = r} |f(z)|$$

$$|f^{(n)}(z_0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right|$$

→ נעשה כיוון חיובי סביב z_0 בקרבת z_0

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{C_r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^{n+1}} |d\zeta| = \frac{n!}{2\pi r} \max_{\zeta \in C_r} |f(\zeta)| \cdot \frac{1}{r^n} \cdot \text{length}(C_r) =$$

$$= \frac{n!}{r^n} \max_{\zeta \in C_r} |f(\zeta)|$$

מטען Liouville

אם $f \in \text{Hol}(\mathbb{C})$ היא פונקציה אנליטית בכל $\mathbb{C}$, אז f קבועה.

הוכחה - נניח ש- $M = \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| < \infty$, אז f היא פונקציה אנליטית.

$\forall z_0 \in \mathbb{C}$.

$$M > 0. \quad |f'(z)| \leq \frac{M}{r} \rightarrow f' \equiv 0 \rightarrow f \text{ קבועה}$$

הערה - $f \in \text{Hol}(\mathbb{C})$ נקראת פונקציה אנליטית.

המשפט היסודי של האלמנטריות

כל פולינום עם מקדמים ב- $\mathbb{C}$ ניתן לפירוק לגורמים ליניאריים.

הוכחה - מספיק להראות שכל פולינום מדרגה ≥ 1 יש שורש $\leftarrow$ ואז אינדוקציה.

$$P(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n$$

נניח בשלילה ש- P אינו שורשים כלומר $\forall z, P(z) \neq 0$.
נבחר אז את $f = \frac{1}{P}$ $\rightarrow$ פ' שלמה.

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |P(z)| = \lim_{|z| \rightarrow \infty} |a_n z^n| \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \frac{a_{n-2}}{a_n z^2} + \dots + \frac{a_0}{a_n z^n} \right) = \infty$$

כמוכן $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = 0$.
כלומר, יש רדוס R כך ש- $|f(z)| < 1$ לכל $|z| > R$.

מכאן ש- f חסומה, ולכן f משפט Liouville, f קבועה. סתירה לכך שדרג $P \geq 1$.

משפט ירדן

משפט ו- $f \in H_0(G)$, $a \in G$ ב- $\forall n=0,1,2,\dots f^{(n)}(a)=0$ אז $f \equiv 0$.

הוכחה - פ' הולומורפית ניתנת לפיתוח טיילור בסביבת a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

כלומר $f(z) = 0$ לכל $z \in B_a(\varepsilon)$ עבור סכז כלשהו.

$$U = \{a \in G \mid f^{(n)}(a) = 0 \quad \forall n=1,2,3,\dots\}$$

הוכחה ש- U חסומה ש- U פתוחה. אז:

$$U = \{z \in G \mid f^{(n)}(z) = 0 \quad \forall n=1,2,3,\dots\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{z \in G \mid f^{(n)}(z) \neq 0\}$$

אבל $\{z \in G \mid f^{(n)}(z) \neq 0\}$ סגור, ולכן U פתוחה. אז $U = G$.

הערה - $f \in H_0(G)$, $f \neq 0$. נק' $a \in G$ כך $f(a) = 0$.
אם f אינה נק' a ויהיה $f^{(n)}(a) \neq 0$ $\rightarrow$ a ב- f חז' m .

$$m_f(a) = \min \{n \geq 1 \mid f^{(n)}(a) \neq 0\}$$

מהמשפט הקודם: $m_f(a) < \infty$

טענה - אם a אינו נק' של $f \in H_0(G)$ אז $f(z) = (z-a)^m g(z)$ כש- $g \in H_0(G)$ ו- $g(a) \neq 0$.
 $m = m_f(a)$

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-a)^m} & z \neq a \\ \frac{f^{(m)}(a)}{m!} & z = a \end{cases}$$

משפט יחידות 2 - G תחום, $f \in \text{Hol}(G)$, $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset G$, $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \in G$, $f(z_n) = 0$ לכל n , אז $f \equiv 0$ או $f(z) = 0$ לכל $z \in G$.

הוכחה - נניח בהנחה $f \not\equiv 0$. נגדיר $g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^m}$ עבור m מספיק גדול. $g \in \text{Hol}(G)$, $g(a) \neq 0$. נגדיר $h(z) = g(z) \cdot (z-a)^m$. אז $h(z) = f(z)$ ו- $h(a) \neq 0$. נגדיר $h(z) = f(z) \cdot (z-a)^m$. אז $h(z) \neq 0$ לכל $z \in G$.

משפט ויטנברג - G פתוחה, $f_n \in \text{Hol}(G)$, $n=1,2,\dots$, $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ במובן מקומי ב- G . אז $f \in \text{Hol}(G)$ ו- f סגור. (בממשיים - במובן אופייני לא צריך להיות!)

הוכחה - נניח $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ במובן מקומי. נגדיר $g_n(z) = f_n(z) - f(z)$. אז $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ במובן מקומי. נגדיר $h_n(z) = \frac{g_n(z)}{z - z_0}$ עבור $z_0 \in G$. אז $h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ במובן מקומי.

נקח $z \in G$, כיוון $z_n \rightarrow z$ ו- $f_n \rightarrow f$ במובן מקומי, יש סדר $n_j \rightarrow \infty$ כך ש- $f_{n_j}(z) \rightarrow f(z)$. אז $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n_j}(z) = f(z)$.

משפט ההסדרה של קושי: אם g הולומורפית, אז לכל $j=1,2,\dots$:

$$|g^{(j)}(z_0)| \leq \frac{j!}{r^j} \max_{|z-z_0|=r} |g(z)|$$

נבחר $r = \frac{\delta}{2}$, $g = f_n - f$.

עכשיו נבחר δ כך ש- $|z_0 - z| \leq \frac{\delta}{2}$ מתקיים:

$$|f_n^{(j)}(z_0) - f^{(j)}(z_0)| \leq \frac{j!}{(\frac{\delta}{2})^j} \max_{|z-z_0| \leq \frac{\delta}{2}} |f_n(z) - f(z)| \leq \frac{j!}{(\frac{\delta}{2})^j} \sup_{|z-z_0| \leq \delta} |f_n(z) - f(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

לכן $f_n^{(j)} \rightarrow f^{(j)}$ במובן מקומי.

עיקרון המקסימום - G תחום, $f \in \text{Hol}(G)$, אם $|f|$ מקבלת מקסימום מקומי ב- $z_0 \in G$, אז f קבועה.

הוכחה - נניח $\omega: G \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega(z) = |f(z)|^2$. אז ω היא פונקציה מממית. נגדיר $u(z) = \frac{1}{2} \omega(z)$. אז u היא פונקציה מממית. נגדיר $v(z) = \frac{1}{2} \omega(z)$. אז v היא פונקציה מממית.

נניח כי $z_0 \in G$ נק' מקסימום מקומי של ω . נגדיר $u(z) = \frac{1}{2} \omega(z)$. אז u היא פונקציה מממית. נגדיר $v(z) = \frac{1}{2} \omega(z)$. אז v היא פונקציה מממית.

אז u היא פונקציה מממית, ו- u פתוחה. נק' u מקסימום מקומי ב- z_0 .

$$m = u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \varepsilon e^{it}) dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} m dt = m$$

לכן $u(z) = m$ לכל $z \in G$. אז $\omega(z) = 2m$ לכל $z \in G$. אז $f(z) = \sqrt{2m}$ לכל $z \in G$.

לכן u קבועה. נגדיר $v(z) = \frac{1}{2} \omega(z)$. אז v היא פונקציה מממית. נגדיר $w(z) = \frac{1}{2} \omega(z)$. אז w היא פונקציה מממית.

$f(0) = 0$ הומומורפיזם $f: D_0(1) \rightarrow D_0(1)$ תהי
 $\forall z \in D_0(1) \quad |f(z)| \leq |z|$ (1)

$$\forall z \in D_0(1). |f(z)| \leq 12$$

$$|f'(0)| \leq 1 \quad (2)$$

$$|f'(0)| \leq 1 \quad (2)$$

$$1 = 1 \quad \text{OK} \quad (3)$$

2. u'_{sk}

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}$$

מכנות - עציר $g: D_0(1) \rightarrow \mathbb{C}$

אס כול קצם, g השואות

נרמק $z \in D_0(1)$, ויהי $r \leq 1$ ונבחר N גדול כן עד $|z| < r$, $|z| < r$ ונבחר N גדול כן עד $|z| < r$, $|z| < r$ ונבחר N גדול כן עד $|z| < r$.

$$|g(z)| \leq \max_{|z|=r} |g(z)| = \frac{1}{r} \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \frac{1}{r}$$

$$|f'(0)| \leq 1, \quad |f(z)| \leq |z| \quad \text{p.d.} \quad |g(z)| \leq 1 \quad \text{in } \mathbb{D}_{2p}, \quad r \rightarrow 1 \quad \text{f.k.w.}$$

אם מתקיים אחד השוויונים מ-3, אז נגדע ש- $z_0 \in D_0(1)$ כך ש- $|g(z)|=1$,
משיהיה g קבועה - $|g|=1$, δ, ϵ ש- λ כלשהו.

(חסר שטח) הסבר שטח הפנימי

המשפט - $f(z) = \frac{1}{1-z}$ הווארפס $|z| < 1$ $f(z) = 1 + z + z^2 + \dots$ $|z| < 1$ יש סדר פתוח סדר

מה עם $|z| > 1$?

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} \dots \quad |z| > 1$$

דוגמה - $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$

אם $|z| < 2$ $\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$

$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} (z)^n$

אם פיתר עוקר בטבעת $|z| < 2$ יהיה

$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, $c_n = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}} & n \geq 0 \\ -1 & n < 0 \end{cases}$

מטרה - אם f הווארפס בקיט מוקד $D_{z_0}(r) \setminus \{z_0\}$ אז אפשר לכתוב:

~~$f(z) = \dots$~~ $f(z) = \dots \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 \dots$

1) $\int f = 2\pi i$, $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ (אנאלוג - 1)

2) $\int f = 0$, $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^2}$ (2)

סוגיה - " נקודות $F = \frac{1}{z-z_0}$, $F' = f$, f הווארפס קיט z_0 עם מוקד...

אנחנו נראה - $\int f dz = a_{-1} \cdot 2\pi i$

הסדרה - $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ סדרה $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ והיא $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ מתכנס

אם $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ מתכנס אז z קרובות $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ מתכנס. אומר הוקר מתכנס.

$R_- = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_{-n}|^{1/n}$, $R_+ = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}}$ - רדיוס

$A = A_{z_0}(R_-, R_+) = \{z \in \mathbb{C} \mid R_- \leq |z-z_0| \leq R_+\}$:annulus אם $R_+ > R_-$ אז R_+ ו- R_- הווארפס.

משפט עזרן I - נתון טור ערך $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ כזה ש- $z_0 \in \mathbb{C}$
 $\Sigma = \Sigma_+ + \Sigma_-$, $\Sigma_- = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n$, $\Sigma_+ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ (1)

- (1) הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ מתכנס ב- $\mathbb{C} \setminus A$
 (2) אם $R_+ > 0$, הטור Σ_+ מתכנס בעיט מקומית, בהחלט, בדיסק $D_{R_+}(z_0)$ (כבר הוכחנו)
 (3) אם $R_- < 0$, הטור Σ_- מתכנס בעיט מקומית, בהחלט, ב- $\mathbb{C} \setminus D_{R_-}(z_0)$
 (4) אם $R_- \leq R_+$, הטור Σ מתכנס בעיט מקומית, בהחלט, ב- A , סמוך כווי המישורית, ובנוסף

$\forall n \in \mathbb{Z}$
 $\forall R_- < r < R_+$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(z-z_0)^{n+1}} d\zeta$$

 נגזר כיוון השעון

הוכחה - (1) ברור שמתכנס כש-
 נתון הטור סידור
 רציוס ההתכנסות הוא

$$\frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}} = \frac{1}{R_-}$$

עם אם $|z-z_0| > \frac{1}{R_-}$, הטור (4) מתכנס.
 (ר' 2) $\xi = \frac{1}{z-z_0}$, ונקבל שם $|z-z_0| < R_-$ אם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ מתכנס.

(3) הטור (4) מתכנס בהחלט ובעיט מקומית ב- $D_{R_+}(z_0)$
 נגזר שם $\xi = \frac{1}{z-z_0}$ ונקבל שם $|z-z_0| > R_-$ ו- $|1-\xi| \leq 1$

לכל z במישור התכנסות בהחלט ב- $\mathbb{C} \setminus D_{R_-}(z_0)$
 נגזיר $g(z) = \frac{1}{z-z_0}$ כרציוס בתחום
 f משמירה את G - f - $D_{R_+}(z_0)$
 יהי $G \subset K$ קומפקטית, כל z - Σ מתכנס בעיט K -אחר, מאחר
 ו- (a_n) קומפקטית, הטור (4) מתכנס בעיט ב- (a_n) שומר:

$$\sup_{\zeta \in G} |h(\zeta) - \sum_{n=1}^N a_n \zeta^n| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

$$q(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n \quad (N)$$

$$\sup_{z \in K} |q(z) - \sum_{n=1}^N a_n (z-z_0)^n| \leq \quad \text{אם}$$

$$\leq \sup_{\zeta \in G} \left| \frac{1}{\zeta} h(\zeta) - \sum_{n=1}^N a_n \zeta^n \right|$$

עם Σ מתכנס בעיט מקומית ב- $\mathbb{C} \setminus D_{R_-}(z_0)$

(4) הטורים Σ_+ , Σ_- מתכנסים פונקציה המישורית (ברציו)

סמוך לפיכך הוא כווי המישורית ב- A .
 (סמנה ב- f): $\forall z \in A, f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

יהי $z \in K$, $R_- < r < R_+$, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ מתקיים:
 $(**) \quad \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-k-1}$

ב- A הפונקציה $(z-z_0)^{k+1}$ כרציוס (חסומה) בעיט K - A מתכנס
 (**) Σ מתכנס בעיט מקומית.

כל $\int$ עומד אינטגרציה אבר אבר:
 $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(z-z_0)^{k+1}} d\zeta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(z-z_0)^{n-k-1}}{(z-z_0)^{k+1}} d\zeta$

אם $-1 \neq k-1$, האינטגרל מתאפס כי $\int$ סוף קרציוס ב- $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

עם $k-1 = k$ נקבל $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(z-z_0)^{k+1}} d\zeta = \frac{a_k}{2\pi i} \cdot 2\pi i = a_k$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n (z - z_0)^n$$
$$\rho_- = \overline{\lim_{n \rightarrow -\infty}} |a_n|^{1/n}, \quad \rho_+ = \frac{1}{\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} |a_n|^{1/n}}$$
$$\forall R_1, r < R_2. \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{R_2}(r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$
$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{20}(r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

7807 $I(r) = \int_{C_r} f dz$

$$I(r) = \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) \cdot re^{it} dt$$

כאשר t_1 רצפה, t_2 אצורה במערכת הראשון, ולצדו רצפה, t_3

$$\frac{\partial}{\partial r} \int_{t_1}^{t_2} h(r, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial r} h(r, t) dt$$

$$\frac{\partial I}{\partial r} = \int_0^{2\pi} f'(z_0 + re^{it}) \cdot e^{it} \cdot ir e^{it} + ie^{it} f(z_0 + re^{it}) dt =$$

1. N ကို z ရှိနေစဉ် $\rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} (f(z_0 + re^{it}) e^{it}) dt = 0$

← 108 I קבלת

משמעות המילים : אם
7 הוא מאורע בטבעת האנטרס
בטבעת (כל משהו מה הרצ'וס) הבוע.

דוגמה ב' - $f \in H_0(A_{z_0}(a,b))$, $0 \leq a < b$

$$C_r = \{z : |z - z_0| = r\} \quad \text{כיוון השעון}$$

לכל ω המקיים $a < r_1 < |\omega - z_0| < r_2 < b$ מתקיים:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_2}} \frac{f(z)}{z - \omega} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_1}} \frac{f(z)}{z - \omega} dz$$

הוכחה - קבע ω ולבדוק

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(\omega)}{z - \omega} & z \neq \omega \\ f'(\omega) & z = \omega \end{cases}$$

g הומומורפית ב- $A_{z_0}(a,b)$ ורציפה ב- ω , כל g הומומורפית ב- $A_{z_0}(a,b)$

$$\int_{C_{r_1}} g = \int_{C_{r_2}} g \quad \text{אם נשמה א':}$$

כאמור:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{C_{r_2}} \frac{f(z) - f(\omega)}{z - \omega} dz - \int_{C_{r_1}} \frac{f(z) - f(\omega)}{z - \omega} dz = \\ &= \int_{C_{r_2}} \frac{f(z)}{z - \omega} dz - \int_{C_{r_1}} \frac{f(z)}{z - \omega} dz - \underbrace{\int_{C_{r_2}} \frac{1}{z - \omega} dz}_{=0} + \underbrace{\int_{C_{r_1}} \frac{1}{z - \omega} dz}_{=0} \end{aligned}$$

← נעביר אגפים, נחלק ב- $2\pi i$, ונסיד.

הוכחת משפט פאורן II

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

יהי $a < r < b$ ולבדוק

(לא תלוי בבחירת r משמה א')
המשפט נראה נכון

$$\forall z \in A, \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

ומספיק להוכיח זאת, השאר נובע ממשפט פאורן I.

קבע $z \in A$ ויהי $r_1 < r_2$ מספרים כן ש- $a < r_1 < |z - z_0| < r_2 < b$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_2}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

$$\text{אם } \xi \in C_{r_2}, \quad \frac{|z - z_0|}{|\xi - z_0|} = \frac{|z - z_0|}{r_2} < 1$$

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n$$

כל הפונקציות הן $\xi \in C_{r_2}$

המטח הפעולה הבאה.

המשק הוכחה:

נעשה אינטגרציה איבר איבר ונקבל כי

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

נעשה אותו דבר לאינטגרל של פני $\xi \in C_r$,

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = - \frac{f(\xi)}{z - \xi} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}} = - \frac{f(\xi)}{z - \xi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right)^n =$$

$$= - \frac{f(\xi)}{z - \xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} = - \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{(z - z_0)^k}{(\xi - z_0)^{-k+1}} f(\xi)$$

אינטגרציה איבר איבר -

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = - \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k$$

ומענה ב' סיימנו.

נ"ק סינולריות על פונקציות הולומורפיות

הפזרה - $D_{z_0}^*(r) = \{z \mid |z - z_0| < r\}$ את הקבוצה (הדיסק המעקב סביב z_0 ברדיוס r)

נאמר ש- z_0 נ"ק סינולרית מבוצת של f אם f הולומורפית ב- $D_{z_0}^*(r)$ עבור סכר כלשהו.

נאמר ש- z_0 נ"ק סינ' סדירה אם יש המענה הולומורפית f ב- $D_{z_0}(r)$.

משפט ההמענה של רימן - $f \in \text{Hol}(D_{z_0}^*(r))$. z_0 סדירה $\iff f$ חסומה ב- $D_{z_0}^*(\delta)$ עבור $\delta < r$ כלשהו.

הוכחה - אם z_0 סדירה, אז f חסומה ב- $D_{z_0}(\delta)$ $\forall \delta < r$ ובפרט חסומה.

משפט מצב שני, (ניח f חסומה ב- $D_{z_0}^*(\delta)$ ויש פיתוח סדרון:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in D_{z_0}^*(\delta)$$

$$\forall \varepsilon < \delta, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

אם $n < 0$, ניוכח ש- $a_n = 0$, כי:

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \varepsilon \cdot \frac{M}{\varepsilon^{n+1}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

לסיכום, f יש פיתוח סדרון! כלומר היא הולומורפית ב- $D_{z_0}(\delta)$ וניתן לטעון $f(z_0) = a_0$

מסקנה - z_0 סד'קה $\longleftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)|$ קיים וסופי

תהא $f \in H_0(D_{z_0}^*(r))$, (פתח טור פורן

$$f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$$

יש 3 מקרים:

(1) z_0 סד'קה $\leftarrow a_n = 0, \forall n \geq 0$

(2) z_0 היא קוטב מסדר N (כש $a_{-N} \neq 0$) $\leftarrow \exists n \geq 1, \forall n \leq N, a_n = 0$

(3) $a_n \neq 0$ עבור אינסוף מ-ים שליליים $\leftarrow z_0$ סינגולריות עיקרית

דוגמאות

(1) $z_0 = 0$, $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ $\leftarrow z_0$ סד'קה

(2) $f(z) = e^{1/z}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$ $\leftarrow 0$ סינגולריות עיקרית

קטבים

לפי של f - קוטב ב- z_0 מסדר m :

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + \dots$$

ב'ט ב- $g(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \dots$

אז $g(z) = (z-z_0)^m f(z)$ ו- $g(z_0) \neq 0$ והעומדות ב- $D_{z_0}(r)$

מכאן ש, אם התקדנו מ- g העומדות אז ב- $\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ יתבאר כי יש קוטב מסדר m .

מסקנה - f קוטב מסדר m ב- $z_0 \iff$ קיימת g העומדות ב- $D_{z_0}(r)$, $g(z_0) \neq 0$

$$\forall z \in D_{z_0}^*(r), f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$$

תצבורת - אם f אם ב- z_0 מריבוי m , $f(z) = g(z)(z-z_0)^m$

לדוגמה - (1) אם f יש אפס מריבוי m ב- z_0 $\leftarrow f$ וקוטב מסדר m ב- z_0
(2) אם f קוטב מסדר m ב- z_0 , אז f יהיה אפס מריבוי m .

הוכחה - נניח קודמת g העומדות ב- $D_{z_0}(r)$ ו- $g(z_0) \neq 0$
יש סדר k כך ש- $\forall z \in D_{z_0}(r), g(z) \neq 0$

$$f(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{g(z)} \cdot \frac{1}{(z-z_0)^m}$$

לכן f - פתח טור פורן ב- $D_{z_0}(r)$ והמקדם הראשון $\neq 0$

לכן f - פתח טור פורן $\iff$ הפתח טור פורן הוא m - $(-m)$.

משפט - $f \in H_0(D_{z_0}^*(r))$ אם z_0 קוטב δ -י איננו

יתר על כן, סדר הקוטב m הוא המספר המינימלי הטבעי המקיים

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |z - z_0|^m \cdot |f(z)| \neq 0$$

הוכחה - נניח ש- z_0 קוטב מסדר m , אם מהמסקנה

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|g(z)|}{|z - z_0|^m} = \infty$$

בנוסף, נסמן $g(z) = |z - z_0|^m \cdot f(z)$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |z - z_0|^m \cdot |f(z)| =$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|g(z)|}{|z - z_0|^{m-1}} = \begin{cases} \infty & l < m \\ g(z_0) & l = m \\ 0 & \text{א.ש.} \end{cases}$$

כיוון ש- $g(z_0) \neq 0$ ו- $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$

אז יש סדר $\leq m$ כך ש- $|f(z)| \geq 1$ $\forall z \in D_{z_0}^*(\epsilon)$

(ביט) ב- $h(z) = \frac{1}{f(z)}$ הפונקציה h ב- $D_{z_0}^*(\epsilon)$ וחסומה על דיסק מתקף זה. z_0 נקודת סינגולר ב- h . אם הוכחנו שיש δ - $h: D_{z_0}^*(\epsilon) \rightarrow \mathbb{C}$ המעבה הפונקציות.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |h(z)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{|f(z)|} = 0$$

כאמור $h(z_0) = 0$

עכשיו נניח z_0 קוטב מסדר m של f . אז $h(z) = \frac{1}{f(z)}$ אינו קוטב מסדר m ב- z_0 .

הערה - אם f הפונקציה בתחום D פשוטה (כלומר, אינה יכולה להיפרק כמכפלה של פונקציות אחרות) אז f אינה יכולה להיות קוטב.

הצורה - תהא $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ עקומה סגורה. $\gamma(a) = \gamma(b)$.
 תהא θ בחירה רצופה של האדמות, או ψ בחירה רצופה של $\log \gamma$.
 אז האינטגרל של γ סביב 0 הוא:

$$\text{Ind}_\gamma(0) = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} = \frac{\psi(b) - \psi(a)}{2\pi i}$$

הצורה - תהא $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ מסלול, $z \notin \gamma$. (נוח ש γ סגורה).
 נגדיר $\gamma_z(t) = \gamma(t) - z$, אז $\gamma_z: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ מסלול נגזר:

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \text{Ind}_{\gamma_z}(0)$$

משפט - $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ מסלול סגור, חסר עצמים, $z \notin \gamma$, אז:

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}$$

הוכחה - נוח בה"כ ש $z=0$, ראוי ש $\psi(t) = C + \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} ds$ היא בחירה רצופה של $\log \gamma$.
 עכ"ל:

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} (\psi(b) - \psi(a)) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi}$$

ס - z כלפי זה נובע מ- $z=0$ מההצבה $\text{Ind}_\gamma(z)$.

תכונות האינטגרל

- 1) $\text{Ind}_\gamma(z) = \text{Ind}_{-\gamma}(z)$
- 2) הערך של $\text{Ind}_\gamma(z)$ לא תלוי בפרמטריזציה של γ .

- 3) $\text{Ind}_\gamma(z) = 0$ אם γ רכיב הקטירות של U .
 אם γ רכיב הקטירות של U וחסום של U , אז $\text{Ind}_\gamma(z) = 0$.
- 4) $\text{Ind}_\gamma(z) = 0$ אם γ רכיב הקטירות של U וחסום של U .

הוכחה - 3) מניחות $\gamma(z) = \text{Ind}_\gamma(z)$, $g: U \rightarrow \mathbb{C}$.

- 4) $\gamma \subseteq \mathbb{C}$ קומפקטית ע"פ $R \in \mathbb{C}$ כן ש- $D_0(R)$ היא חיתוך של U וחסום של U .
 היות ש- $D_0(R) \subseteq U$ קב"ק קטיות ה- U , היא חיתוך של U וחסום של U .
 מוכח באמצע מרכיבי הקטירות של U , בפרט ברכיב העל חסום של U .
 נבחר שם z_0 , ונבחר $z \notin D_0(R)$.

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} = 0$$

כי $\frac{1}{\xi - z}$ חלומותית ה- $D_0(R)$ ומאחר שהמסלול γ חסום של U .

נבחר נקודה z_0 במרכז רכיב קטירות, $z_0 \in U$ וחסום של U .
 $0 = \text{Ind}_\gamma(z_0) = \text{Ind}_\gamma(z)$

מסלול קושי הפעיל

$f \in \text{Hol}(G)$, G תחום קמור, $\gamma \subset G$ מסלול סגור

$$\forall z \in G \setminus \gamma \quad \text{Ind}_\gamma(z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

הוכחה - נגזיר

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \zeta \neq z \\ f'(z) & \zeta = z \end{cases}$$

g פונקציה רגילה, הולומורפית ב- $G \setminus \{z\}$ ← הולומורפית בכל G .

נשתמש בקושי -

$$0 = \int_\gamma g(\zeta) d\zeta =$$

$$= \int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$$

$$\text{Ind}_\gamma(z) \cdot 2\pi i$$

הוא 0 -

$$\text{Ind}_\gamma(z) f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

הומוטופיה

הגדרה - הומוטופיה של מסלול סגור בתחום G הוא הצורה רגילה

$$\Gamma: [0,1] \times [a,b] \rightarrow G$$

כך נקבע $s \in [0,1]$ הסוקציה:

$$\gamma_s(t) := \Gamma(s, t)$$

היא מסלול סגור

נניח במסלול ששטח S , על חלקו עמוק, $\frac{\partial^2 \gamma_s(t)}{\partial s \partial t}$ קיים ורציף, ואם Γ נצורה ב- S ברצפות.

הגדרה - γ_s מסלול יקראו הומוטופיות אם γ הומוטופיה Γ כך ש:

$$\forall t, \quad \gamma_0(t) = \Gamma(0, t)$$

$$\gamma_1(t) = \Gamma(1, t)$$

משפט - אם $f \in \text{Hol}(G)$, γ_s מסלול הומוטופיות ב- G , אז

$$\int_{\gamma_0} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_1} f(\zeta) d\zeta$$

הוכחה - $I(s) = \int_{\gamma_s} f(z) dz$

נראה כי $\forall s, I'(s) = 0$

$$I(s) = \int_a^b f(\gamma_s(t)) \frac{\partial \gamma_s(t)}{\partial t} dt$$

כנראה ג- s, t ופונקציה גרזינגה ג- s

עכשיו נחשבים:

$$\frac{\partial}{\partial s} I = \int_a^b \left(f'(\gamma_s(t)) \frac{\partial \gamma_s(t)}{\partial s} \cdot \frac{\partial \gamma_s(t)}{\partial t} + f(\gamma_s(t)) \frac{\partial^2 \gamma_s(t)}{\partial s \partial t} \right) dt =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \left(f(\gamma_s(t)) \cdot \frac{\partial \gamma_s(t)}{\partial s} \right) dt =$$

$$= f(\gamma_s(t)) \frac{\partial \gamma_s(t)}{\partial s} \Big|_{t=a}^{t=b} = 0$$

סמכות

מסקנה - γ_0, γ_1 מסלולים, $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0, z_1\}$ הומוטופיות ג- $\mathbb{C} \setminus \{z_0, z_1\}$

$$\text{Ind}_{\gamma_0}(z) = \text{Ind}_{\gamma_1}(z)$$

(לא חייב $\mathbb{C}$, אפשר סתמים G)

הערה - γ קראת כווידה ג- γ אם היא הומוטופית למסלול קבוע למטה.

הערה - בכל תחום קמור, לא מסלול סגור ~~הוא~~ היא כווידה (תחום פשוט קמור)

סיבה: נגזיר $\gamma'(s, t) = \gamma(t)$

$$\gamma'(s, t) = (1-s)\gamma(t) + s\gamma(0)$$

$$\gamma_t = \gamma'(1, t) = \gamma(0)$$

מסקנה - γ הומוטופית בתחום G ו- γ מסלול כווידה, אז

$$\int_{\gamma} f dz = 0 \rightarrow \text{הפונקציה לא משפטה קוטי}$$

אינדקס של γ ב- 0 (γ מסלול סגור שאם עוברת ב- 0):

$$\text{Ind}_\gamma(0) := \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$$

θ - בחירה רציפה של הארגומנט.

$$\text{Ind}_\gamma(z) := \text{Ind}_{\gamma_z}(0)$$

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

$$\gamma_z(t) = \gamma(t) - z$$

קריטריון לרעיון פונקציה קצומה

הנחות: γ קצומה ב- G ?
בהינתן $f \in H(G)$, האם יש F ב- G כך ש-

$$F'(z) = f(z) \quad \text{ביתחום } G \setminus \{0\}$$

תנאי הכרחי: לכל מסלול סגור γ ב- G מתקיים $\int_\gamma f = 0$

משפט - f רציפה ב- G , אז f היא קצומה ב- G אם ורק אם $\int_\gamma f = 0$ לכל מסלול סגור γ ב- G .

$$\int_\gamma f = 0$$

הוכחה - נקבע $w_0 \in G$ ונבחר γ_z מסלול חלקי בין w_0 ל- z ונצטרף:

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta$$

הנחה: f היא פונקציה רציפה (כי כל המסלולים האלה צריכים להיות מותקנים בקיטעון של האינטגרל) כל מסלול סגור יתאבס.

נבחר $w_0 \in G$ ונבחר F בצורה $F(w_0) = 0$

יהי D דיסק קטן סביב w_0 ונבחר $w \in D$ נסמן ב- $[w_0, w]$ את הקטע הישר המחבר בין w_0 ל- w אז:

$$F(w) = \int_{\gamma_w} f(\zeta) d\zeta + \int_{[w_0, w]} f(\zeta) d\zeta$$

עכשיו משפט קושי יש F ב- D קצומה ב- D , נסמנה ב- G אז:

$$F(w) = \int_{\gamma_w} f(\zeta) d\zeta + \int_{[w_0, w]} G'(\zeta) d\zeta =$$

$$= C + G(w) - G(w_0)$$

עכשיו F בצורה $F'(w) = G'(w) = f(w)$

הוכחת המשפט - התנאי שקודם לכן יש - $\int_\gamma \frac{f'}{f} = 0$

נניח g פונקציה של $\log f$ ב- G . $\forall z \in G, e^{g(z)} = f(z)$

$$g' e^g = f' \rightarrow g' = \frac{f'}{f}$$

לכן g קדומה של $\frac{f'}{f}$ ונכא $\int_\gamma \frac{f'}{f} = 0$

נצטר שני, אם מתקיים $\int_\gamma \frac{f'}{f} = 0$ (בגודל $z_0 \in G$ ונקודות):

$$g(z) = \log f(z_0) + \int_{z_0}^z \frac{f'}{f}$$

$$g(z) = \log f(z_0) + H(z), \quad \frac{f'}{f} = H'(z) \rightarrow g \in \text{Hol}(G)$$

נבא כי $e^{g(z)} = f(z)$ נכון

$$G' = f' e^{-g} - f e^{-g} g' =$$

$$= e^{-g} \left(f' - f \cdot \frac{f'}{f} \right) = 0$$

$$G(z_0) = f(z_0) \cdot e^{-\log f(z_0)} = 1$$

$$G \equiv 1$$

תנאי - הראו שיש פונקציה של $\log \frac{z-z_1}{z-z_2}$ ב- $\mathbb{C} \setminus [z_1, z_2]$ $\rightarrow$ לא מסתירה בין z_1 ל- z_2

שאלות

הצורה - $f: D_{z_0}^*(r) \rightarrow \mathbb{C}$, הוסיף, יש פיתוח סדרון

$$z \in D_{z_0}^*(r), \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

הטאיות של f ב- z_0 $\text{Res}_{z_0}(f) = a_{-1}$ (מקדם סדרון של $\frac{1}{z-z_0}$)

נוסחא נוספת לחישוב הטאיות: נניח ש- f יש קוטב מסדר m ב- z_0 .

$$f = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + \dots$$

$$g = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \dots$$

g הוסיף ב- z_0 ואם נבחר אותה ו- m פזמ'ם ונציב z_0 נקבל את $(m-1)! \cdot a_{-1}$ כדומה:

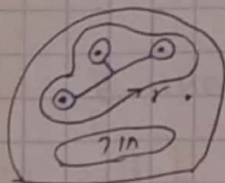
$$\text{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-z_0)^m f(z) \right)$$

מעט הסברית

$f \in H^1(G \setminus E)$ מ- G תחום, E מ' סופי של נ' סיבוליות.
~~היה~~ $E \subset G$ מ' סופי סגור שבו $G \setminus E$ הוא G .

$$\int_{\gamma} f = 2\pi i \sum_{z \in E} \text{Ind}_z(\gamma) \cdot \text{Res}_z(f)$$

הוכחה - אינטואיציה טופולוגית
 - נ' סיבוליות
 - המסלול המקורי
 - הקיבול של γ



נוכח עבוד הקיבול. קיצר טריוויאלי.

נראה הוכחה אנליטית פורמלית.

נמאן $\{z_1, z_2, \dots, z_q\} \subset E$ סבבי $q \leq K$.
 S_K את הטור הפולימי בפיתוח

$$S_K(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(K)} (z - z_K)^n$$

מקדם $a_n^{(K)}$ של f בזמן קטן סביב z_K .

$$g = f(z) - \sum_{k=1}^q S_K(z)$$

נקח g הולד G , כלומר g סלקה עבוד g .
 מוכח כי g הולד G , כלומר g סלקה עבוד g .

שכן בסביבת z_K , f ו- S_K מתלכדו את החזקות הפולימיות בפיתוח יחיד של f .
 ספיקן, כיוון ש- f כוויציה,

$$\int_{\gamma} g = 0$$

$$\int_{\gamma} f = \sum_{k=1}^q \int_{\gamma} S_K(z) dz = \sum_{k=1}^q \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(K)} \int_{\gamma} (z - z_K)^n dz =$$

$$= \sum_{k=1}^q \text{Res}_{z_K}(f) \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_K} dz$$

$$2\pi i \text{Ind}_{\gamma}(z_K)$$

צורתה למעגל אינטגרל ממשלי

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

נראה -

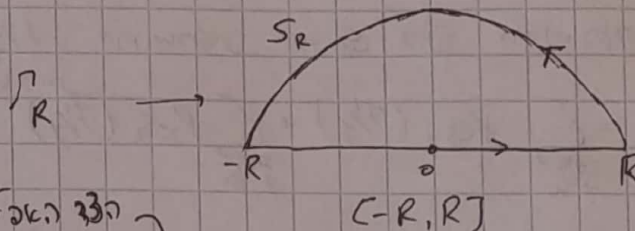
$$f(z) = \frac{1}{1+z^4}$$

פיתרון -

$$e^{\frac{\pi i}{4}}, e^{\frac{3\pi i}{4}}, e^{\frac{5\pi i}{4}}, e^{\frac{7\pi i}{4}}$$

$z^4 = -1$ והם δ - יש קטבים בקו δ -

נקח את המסלול:



הצב המסלול של אטו ה- δ

$$\int_{S_R} f dz \leq \pi R \cdot \sup_{z \in S_R} \left| \frac{1}{1+z^4} \right| \leq \frac{\pi R}{R^4-1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

נשים לב -

$$\text{Res}_{z_1} f = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{(z-z_1)}{1+z^4} = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{z^3} = \frac{1}{4} e^{\frac{5\pi i}{4}}$$

נחשב שאריות -

$$\text{Res}_{z_2} f = \frac{1}{4} e^{\frac{3\pi i}{4}}$$

חיסובם עם ביטוי זה

$$\int_{\Gamma_R} f = \frac{2\pi i}{4} \left[e^{\frac{5\pi i}{4}} + e^{\frac{3\pi i}{4}} \right] = \frac{2\pi i}{4} \left(-2 \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

קום!

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^4} dx + \int_{S_R} f(z) dz$$

$\downarrow$ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$ $\rightarrow 0$

עקרון הארמור

פאקטור

יהי f תחום D - $f \in \text{Hol}(D)$ פונקציה אנליטית סופית של D סגורה קטבית.
 תהי γ מעגל מסייע כוונתו כן ש-
 ונצטרך $\text{Int}(\gamma) = \{z \mid \text{Ind}(\gamma, z) = 1\}$ נניח ש- f אין אפסים או קטבים 'א' γ .
 כמו כן: מס' האפסים של f ב- $\text{Int}(\gamma)$ כולם רגלי f
 מס' הקטבים של f ב- $\text{Int}(\gamma)$ $P =$

→ יהיו n כתר

$$\text{Ind}_{f \circ \gamma}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P$$

איז:

הוכחה - הפונקציה f'/f מרוכבת ב- D , והנך הסינולריות הן אפסים או קטבים של f .
 לכן אפשר להשתמש:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{\substack{z \text{ אפס} \\ \text{של } f}} \text{Res}_z \left(\frac{f'(z)}{f(z)} \right) + \sum_{\substack{z \text{ קטב} \\ \text{של } f}} \text{Res}_z \left(\frac{f'(z)}{f(z)} \right)$$

נניח ש- z_0 ס מריבוי m , ניתן לכתוב $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ $g(z_0) \neq 0$,
 כסביבה של z_0 ו- g חלומרית.

$$f' = m(z - z_0)^{m-1} g'(z) + g'(z) \cdot (z - z_0)^m$$

$$\frac{f'}{f} = \frac{m g'(z)}{g(z)} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

$$\frac{f'}{f} = \frac{m}{z - z_0} + \underbrace{\frac{g'(z)}{g(z)}}_{\text{חלומרית}}$$

איז

$$\text{Res}_{z_0} \left(\frac{f'}{f} \right) = m$$

ספ

$$f = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$$

נניח z_0 קטב, אז

$$f' = -m(z - z_0)^{-m-1} g(z) + g'(z) (z - z_0)^{-m}$$

$$\frac{f'}{f} = \frac{-m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

$$\text{Res}_{z_0} \left(\frac{f'}{f} \right) = -m$$

ספ

$$\sum_{\text{אפס } z} \text{Res}_z \left(\frac{f'}{f} \right) = Z$$

$$\sum_{\text{קטב } z} \text{Res}_z \left(\frac{f'}{f} \right) = P$$

ספ קיבלנו -

משפט ההצטקה של רימן

יהי G תחום פשוט קשרי ב- $\mathbb{C}$, $G \neq \emptyset$, אז קיימת הצטקה הומומורפית, חזרה, יחידה, כך ש:
 $f: G \xrightarrow{\sim} D_0(1)$
 $f(z_0) = 0$

הצורה - שני תחומים G_1, G_2 נקראים שקולים קונפורמית אם יש $f: G_1 \xrightarrow{\sim} G_2$ הומומורפית

מסקנה - כל שני תחומים פשוטי קשר שאינם $\emptyset$ הם שקולים קונפורמית.

הצורה - חייבים לדבוק $G \neq \emptyset$ כי אין פונקציה הומומורפית לא קבועות $f: \mathbb{C} \rightarrow D_0(1)$ מממש' לויב'.

יחידות במעטל רימן - אם f הצטקה נוספת $g: D_0(1) \xrightarrow{\sim} G$, $g(z_0) = 0$ אז קיים $\theta_0 \in \mathbb{R}$ כך ש:
 $g(z) = e^{i\theta_0} \cdot f(z)$

הוכחה - תהי $h = f \circ g^{-1}$ הוסי' חזרה וזו - $h(z_0) = 0$.
 מהמפה של שווה $|h'(z_0)| \leq 1$.
 מצד שני $h^{-1} = g \circ f^{-1}$ כך $|h'(z_0)| = 1$.

$\exists |g|=1, \forall z \in D_0(1), f(g^{-1}(z)) = z$ מהמפה של שווה

נסמן $G \ni w = g^{-1}(z)$

מקבלים $f(w) = z, g(w) = z$ $\forall w \in G$

דעו! - להוכחת קיום: ענה f היא הפונקציה המקומית $g: G \rightarrow D_0(1)$ הוסי' $g(z_0) = 0$ כך $|h'(z_0)| \leq 1$.
 אז $h(z) = g(f^{-1}(z))$ הוסי' $h(z_0) = 0$ ו- $h: D_0(1) \rightarrow G$ הפונקציה המקומית h מהמפה של שווה.

$$|h'(z_0)| = \left| \frac{g'(z_0)}{f'(z_0)} \right| \leq 1$$

קיבלנו $|f'(z_0)| \neq 0, |g'(z_0)| \neq 0$

דעו! - ענה למצוא פונקציה $f: G \rightarrow D_0(1)$ המקומית את $|f'(z_0)|$

דעו! - אחרי נבחר נק' $z_0 \in G$ וננסה למצוא פ' $f: G \rightarrow D_0(1), f(z_0) = 0$ שמקומית את $|f'(z_0)|$

משפט seljes- osgard - תהי G תחום, $f_h: G \rightarrow \mathbb{C}$ הומומורפית

1- $\forall h \in \mathcal{H}, \forall z \in G, |f_h(z)| \leq M$
 אז יש תת-סדרה f_{h_k} המתכנסת במ"ש מקומית ב- G .

הצורה - במקום חסומות ניתן לדבוק "חסומות במ"ש מקומית"

הוכחה - מספיק לקרוא שכל זיסק D המקיים $\bar{D} \subset G$ תת' המתכנסת במ"ש ב- $\bar{D}$.

אכן, יהי $\{D_k\}_{k=1}^\infty$ קב' בת מנה של זיסקים $\bar{D}_k \subset G$ כך ש- $\bigcup_k D_k = G$.
 אזי ה- "מספיק" תהא $\{f_{h_k}\}$ תת סדרה של $\{f_h\}$ המתכנסת ב- $\bar{D}_1$.
 ידועו תהא $\{f_{h_k}\}$ תת סדרה של $\{f_h\}$ המתכנסת במ"ש ב- $\bar{D}_2 \cup \bar{D}_1$.
 באופן דומה, לכל k נקבל תת סדרה $\{f_{h_k}\}$ המתכנסת במ"ש ב- $\bar{D}_k \cup \bar{D}_{k-1} \cup \dots \cup \bar{D}_1$.

הסדרה האלקטרונית של $\{f_{n,k}\}$ היא סדרה המתכנסת בהמשך $\bar{D}$.
 מכאן, $u - f_{n,k}$ מתכנסת בהמשך מקומית G כי לכל $z \in G$ יש k כך
 ש- $z \in D_k$.

יהי $G \subset \bar{D}$ קיסק $f_n: \bar{D} \rightarrow \mathbb{C}$ חסומת M , נניח בהמשך שמתכנס הקיסק
 הוא 0 , ונפתח פיתוח טיילור של f_n ב- D .

התפתוח בהמשך מקומית ב- D כאשר $z \in D$. $f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z^k \rightarrow$

$$|a_{n,k}| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_0(r)} \frac{f_n(\xi)}{\xi^{k+1}} d\xi \right| \leq$$

$$\leq \frac{2\pi r \cdot M}{2\pi \cdot r^{k+1}} = \frac{M}{r^k}$$

לפיכך לכל k הסדרה $\{a_{n,k}\}$ חסומת ומכאן מתכנסת לכל $k \geq 0$.
 נוצר למכאן תת-סדרה $\{a_{n_j,k}\}$ עבור הסדרה $\{a_{n,k}\}$ מתכנסת לכל $k \geq 0$.

תהי $\{a_{n_j,0}\}$ תת-סדרה של $\{a_{n,0}\}$ מתכנסת.

עכשיו, תהי $\{a_{n_j,1}\}$ תת-סדרה של $\{a_{n,1}\}$ שמתכנסת.

בסומת הסדרה $\{a_{n_j,2}\}$ מקיימת $\{a_{n_j,0}\}$, $\{a_{n_j,1}\}$ מתכנסת.

באופן כללי, בהינתן תת-סדרה $\{a_{n_j,k}\}$ מתכנסת לכל $k \leq k-1$.

נהיה מוגשים עם אינדוקציה, זה לא משפט במחוכמות, נכנס נמאס לך.

21.6 דגל חומר, עזר, דגל מחשבון, 3 שעות, כל החומר כולל שבוע הבא

5 שאלות, עזרים 4, 25 נק' יה שאלה
אין הוספת מעטלים

המדינה לא תשהה דבר אסוף

ציון ש"ה - 100 מס' / בונים (לא היבטי צ"ח...)

טענה שהתקבלה בהוכחה נכונה נשענת, הנה הוכחה מתקנת:

טענה - $\{a_{n,k}\} \subseteq \mathbb{R}$ כך שכל k הסדרה $\{a_{n,k}\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה.

צ"ל - לכל $j \in \{1, 2, 3, \dots\}$ תת' כך שכל k $\{a_{n,j,k}\}_{j=1}^{\infty}$ מתכנסת.

הוכחה - (ביט ב) - $\{a_{n,1}\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה
ע"פ י"ט ו $\{a_{n,j}\}_{j=1}^{\infty}$ כך ש- $\{a_{n,j,1}\}_{j=1}^{\infty}$ מתכנסת.

(ביט ב) - $\{a_{n,j,2}\}_{j=1}^{\infty}$ חסומה.

ע"פ י"ט ו $\{a_{n,j,1}\}_{j=1}^{\infty}$, $\{a_{n,j,2}\}_{j=1}^{\infty}$ כך ש- $\{a_{n,j,2}\}_{j=1}^{\infty}$ מתכנסת.

כיוון שכל תת' גם $\{a_{n,j,1}\}_{j=1}^{\infty}$ מתכנסת.

נמשיך כך ועד k נחליף תת' $\{a_{n,j,k}\}_{j=1}^{\infty}$ ו $\{a_{n,j,k-1}\}_{j=1}^{\infty}$ ו $\{a_{n,j,k}\}_{j=1}^{\infty}$ מתכנסת.

- II - $\{a_{n,j,k-1}\}_{j=1}^{\infty}$

- II - $\{a_{n,j,k}\}_{j=1}^{\infty}$

(ביט בסדרה $\{a_{n,j,k}\}_{j=1}^{\infty}$)

סדרה זו מקיימת שכל $k \geq 1$ $\{a_{n,j,k}\}_{j=1}^{\infty}$ מתכנסת
כיוון שכל $k \geq 1$ $\{a_{n,j,k}\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \{a_{n,j,k-1}\}_{j=1}^{\infty}$

stieltjes-osgood

בכך סימננו את המט

משפט ההסתקה של רמן - הוכחה

משפט - $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום פתוח קטן, $G \neq \mathbb{C}$, $z_0 \in G$, $f: G \rightarrow D_0(1)$, $f(z_0) = 0$, אז יש הסתקה הולומורפית חוזרת ו'א'.

יחידות (הוכחנו כבר) - אם g פ' לנסתר כגשף אז קיים $\theta \in \mathbb{R}$

$$g(z) = e^{i\theta} f(z)$$

$$F = \left\{ f: G \rightarrow D_0(1) \mid \begin{array}{l} f \in \text{Hol}(G) \\ f(z_0) = 0 \end{array}, \text{rinn } f \right\} \quad - 73d$$
$$F \neq \emptyset \quad \text{fals} \quad -I \text{ m} \delta$$
$$P = \sup \{ |f'(z_0)| : f \in F \} \quad |N(0)| = \mathbb{I} \quad \partial N \delta$$

(0 < \rho < \infty) \quad \rho = |f'(z_0)| \quad \text{wobei } f \in F \quad \text{w' sic}

סדרה III - 7 משנה II ה"א ב ד(1).

הוכחת משפט חתך - סדרה $1 + 2 + 3 + \dots$

הוספת I - מספר עמ'ות $\neq$ הממוצעות ב-6 חת"ם וחטומה, כי אם $\neq$ כל חטומה
ע"י R וקח:

$$g(z) = \frac{1}{2R} f(z) - \frac{f(z_0)}{2R}$$

כיוון $\mu - G \neq \emptyset$, תהא $G \in \mathcal{A} \cap G$. כיוון G פשוט (קטן),
 שם מסתבר שגור G ,
 'א' 12

$$\int_{\gamma} \frac{(z-a)'}{z-a} = 0$$

פסיק, י"ט ימ"ל על $\log$ פונקציה $z-a$
 פ"ק י"ט ימ"ל על שורש $z-a$, כחומר ו'
 הדימוסיות כ"ז ע-2

$$\forall z \in G \quad r(z)^2 = z - a$$

כיוון $\log(z-a)$ ו $\log(z-a)$ $e^{h(z)} = z-a$ $l: G \rightarrow \mathbb{C}$ $\sigma \in \pi_1(G)$

$$r(z) = e^{\frac{1}{2} \lambda(z)} \quad \text{sic}$$

$$r(z_1)^2 = r(z_2)^2 \quad \text{f.k.} \quad , \quad r(z_1) = r(z_2) \quad \text{p.k.} \quad \text{in} \quad \text{öfn} \quad r$$

$$z_1 - a = z_2 - a \longrightarrow z_1 = z_2$$

אם כן, $r(z') = -2\omega_0$ כל z' וכן $r(z) = 2\omega_0$ כל z

$$\begin{aligned} r(z)^2 &= z - a = w_0^2 \\ r(z')^2 &= z' - a = (-w_0)^2 = w_0^2 \end{aligned} \quad \} \rightarrow z = z'$$

כדור ארץ מתקרב הידרן ω_0 כל ω_0 - כל מתקרב ω_0

המשך בעמוד הבא.

המשק הוכחת I - יהי z_0 שכן שמתקבל $\bar{z}$ r .
 שבי משפט ההצטרף הסתומה, אז יש סדר כך ש- $D_\varepsilon(z_0) \subset V(G)$
 ואכן $\phi = r(G)/(-z_0)$

עסוק לבדור $f(z) = \frac{1}{r(z) + z_0}$

מתקיים $\forall z \in G, |r(z) + z_0| \geq \frac{1}{2}$, עסוק f חסומה ומחזר:

$$|f| \leq \frac{1}{2}$$

הוכחת II - מקבלת P יש $\{f_n\} \subset F$ עברה $|f_n'(z_0)| \rightarrow P$
 ממעט S - 5 יש תכנס $\{f_{n_k}\}$ מתכנסת בעט מקומית.
 תהי f סוגי הפסול $f_{n_k} \rightarrow f$

ממעט $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z_0) = 0$

ממעט ווירטואל $f'_{n_k} \rightarrow f'$ בעט מקומית

אכן $|f'(z_0)| = P$ ואכן $P < \infty$

ברור ש- $f(z_0) = \lim f_{n_k}(z_0) = 0$

הוכחת III - נניח ש- f אינה רג. תהי $\alpha \in D_0(1) \setminus f(G)$
 (מכאן) $g \in F$ עם $|g'(z_0)| > |f'(z_0)|$

בה"כ נניח כי $\alpha \in (0, \infty)$ (ביט) בסוקציה:

$\forall z \in G, h(z) = \frac{\alpha - f(z)}{1 - \alpha f(z)}$

$\xi \mapsto \frac{\alpha - \xi}{1 - \alpha \xi}$

היא הצטרף מוביל מרדיון עסוק וחזר וא

באופן עסוק, עסוק $\alpha \in D_0(1)$ הסתומה המוביל החזר וא $D_0(1) - N$ $D_0(1) - \delta$

$\xi \mapsto e^{i\theta} \frac{\alpha - \xi}{1 - \bar{\alpha}\xi}$ $\theta \in \mathbb{R}$
 $\alpha \in D_0(1)$

אכן $h: G \rightarrow D_0(1)$ ו- h הסומורפית.

כמקובל, כיוון ש- G פשוט קשר ו- h לא מתאפסת, $\int_{\gamma} \frac{h'}{h} = 0$ עסוק rcg סומה.

אכן יש ענף של h עסוק וסכן יש ענף של ענף h , כסומה יש כי הסומות

(*) $v(z)^2 = \frac{\alpha - f(z)}{1 - \alpha f(z)}$

כיוון ש- $h(z) \in D_0(1)$, $r: G \rightarrow D_0(1)$

המשק הסומה הבא.

חז"ה והוא מורכב

$$g(z) = \frac{r(z) - r(z_0)}{1 - \overline{r(z_0)} r(z)}$$

המשך הוכחת טענה III - נגזיר

$g \in F$ כדור $g: G \rightarrow D_0(1)$, $g(z_0) = 0$

(נגזר)

$$g'(z_0) = \frac{r'(z_0)(1 - |r(z_0)|^2) - 0}{(1 - |r(z_0)|^2)^2}$$

$|r(z_0)|^2 = \alpha$ נשים לב ש-

$$|r(z_0)| = \sqrt{\alpha} \in (0, 1)$$

נגזר את f נטני הנגזרים ב z_0 :
 $2r(z_0)r'(z_0) = -f'(z_0) - \{\alpha f'(z_0)\alpha\} = f'(z_0) \cdot (\alpha^2 - 1)$

כדור $|r'(z_0)| = \frac{(1 - \alpha^2)|f'(z_0)|}{2\sqrt{\alpha}}$

$$|g'(z_0)| = \frac{|f'(z_0)| \cdot (1 - \alpha^2)}{2\sqrt{\alpha}(1 - \alpha)} = |f'(z_0)| \cdot \frac{(1 + \alpha)}{2\sqrt{\alpha}}$$

$1 - 2\sqrt{\alpha} + \alpha > 0 \iff 1 + \alpha > 2\sqrt{\alpha} \iff \frac{1 + \alpha}{2\sqrt{\alpha}} > 1$ אכן

$\uparrow$
 $(1 - \sqrt{\alpha})^2 > 0 \rightarrow$ נכון

$|g'(z_0)| > |f'(z_0)|$ נכון

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

$$f: G \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

כאשר

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$f \text{ חבוטה} \iff \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \iff \text{מיתק"מ ממשלתי C-R}$$

$$\text{Harm}_{\mathbb{C}}(G) = \{ h: G \rightarrow \mathbb{C} \mid h \in C^2(G), \Delta h = 0 \} \quad \text{הזוגות } G \subset \mathbb{C} \text{ תחום}$$

$$h(x, y) = h(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

החלק $\text{Harm}(G)$ - אילו זוגות בתחומים ואלו מרוכבות

$$\text{Re } f, \text{Im } f \in \text{Harm}(G) \quad \text{כשר} \quad \text{Hol}(G) \subset \text{Harm}_{\mathbb{C}}(G) \quad (1)$$

$$G \subset \mathbb{C} \text{ תחום פשוט קשר} \quad (2)$$

$$u \in \text{Harm}(G) \iff \exists f \in \text{Hol}(G) \text{ כך ש- } u = \text{Re}(f)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \in \text{Hol}(G) \iff u \in \text{Harm}_{\mathbb{C}}(G) \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{1}{4} \Delta u = 0 \quad \text{הוכחה 3-}$$

הוכחה 2 - נח $u \in \text{Harm}(G)$ (זכור)

$$g = 2 \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

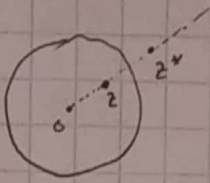
$$\begin{aligned} & \text{אז } g \in \text{Hol}(G) \text{ כשר } G \text{ תחום פשוט קשר, קיימת פונקציה קבועה} \\ & \text{כך ש- } f \in \text{Hol}(G) \text{ ו- } f'(z) = g(z) \quad \forall z \in G \end{aligned}$$

$$f = u_1 + i v_1 \quad \text{כאשר}$$

$$f'(z) = \frac{\partial u_1}{\partial x} + i \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} - i \frac{\partial u_1}{\partial y} = g(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{כ תחום } G} u = u_1 + C \end{aligned}$$



$$D_R = \{ |z| < R \} \quad / \text{NO}$$

$$f \in \text{Hol}(D_R) \cap C(\bar{D}_R) \quad \text{NO}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in D_R \quad \text{YES}$$

$$\arg z^* = \arg z, \quad |z| \cdot |z^*| = R^2, \quad z^* = \frac{R^2}{\bar{z}} \quad \text{YES}$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z^*} d\xi \quad - \text{NO}$$

$$h \in \text{Hol}(D_R) \cap C(\bar{D}_R), \quad h(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi - z^*} \quad / \text{NO}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} f(\xi) \left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi - z^*} \right) d\xi = \quad - \text{YES}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} f(\xi) \frac{z - z^*}{(\xi - z)(\xi - z^*)} d\xi = \left\{ \xi = R e^{i\theta} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(R e^{i\theta}) \frac{(z - \frac{R^2}{\bar{z}}) R e^{-i\theta}}{(R e^{i\theta} - z)(R e^{-i\theta} - \frac{R^2}{\bar{z}})} d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(R e^{i\theta}) \frac{R^2 - |z|^2}{(R e^{i\theta} - z)(R e^{-i\theta} - \bar{z})} d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(R e^{i\theta}) \frac{R^2 - |z|^2}{|R e^{i\theta} - z|^2} d\theta$$

$$= \frac{-\bar{z}(R e^{i\theta} - R^2)}{R e^{i\theta}} = -(\bar{z} - R e^{i\theta}) = R e^{i\theta} - \bar{z}$$

$$: z \in D_R \quad \text{YES} \quad \text{if } f \in \text{Hol}(D_R) \cap C(\bar{D}_R) \quad \text{OK - YES}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(R e^{i\theta}) \frac{R^2 - |z|^2}{|R e^{i\theta} - z|^2} d\theta$$

$$: z \in D_R \quad \text{YES} \quad \leftarrow u \in \text{Harm}(D_R) \cap C(\bar{D}_R) \quad - \text{YES}$$

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R e^{i\theta}) \frac{R^2 - |z|^2}{|R e^{i\theta} - z|^2} d\theta$$