

① הצגות של חבורות סופיות:

הערה:

הצגה ליניארית של החבורה G במרחב ווקטורי V היא הומומורפיזם:

$$\rho: G \rightarrow GL(V)$$

כלומר, לכל $s \in G$ אנו משייכים $\rho(s) \in GL(V)$ כך שמתקיים

$$\rho(st) = \rho(s)\rho(t)$$

הערה:

אם קיימת הצגה $\rho: G \rightarrow GL(V)$ אזורים כי V הוא מרחב הצגה או הצגה.

הערה:

בהינתן הצגה ρ במרחב V של חבורה G , (סדר) $\dim(V) = n$ (אזורים כי המידע או המעלה של ρ הוא n).

הערה:

יהיו (ρ, V) , (ρ', V') שתי הצגות של אותה חבורה G . נאמר שההצגות איזומורפיות אם קיים איזומורפיזם (של גרעין ווקטורים) $\tau: V \rightarrow V'$ המעביר את ρ ל- ρ' , כלומר, לכל $s \in G$ מתקיים:

$$\tau \rho(s) = \rho'(s) \tau$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\tau} & V' \\ \rho(s) \downarrow & & \downarrow \rho'(s) \\ V & \xrightarrow{\tau} & V' \end{array} \quad \leftarrow \text{דיאגרמה קומוטטיבית}$$

הערה:

תהי $\rho: G \rightarrow GL(V)$ הצגה, ויהי $W \subseteq V$ תת-מרחב. נקרא וזיב (אינווריאנט) תחת G אם לכל $g \in G$:

$$\rho_g(W) \subseteq W$$

הערה:

ההצגה $\rho|_W =: \rho^W$ של G במרחב V שבו W תת-מרחב וזיב תחת G היא תת-הצגה של ρ .

השפט:

תהי (V, G) חבורה סופית של חבורה סופית G בגודל V .
יהי $W \subseteq V$ תת-חבורה יזיק תחת G . אזי קיים
משפט ישר W_0 של W בגודל V , כך שכל W_0 יזיק תחת G .

הערה:

אם $\mathbb{C}$, הווקטוריות $\langle x, y \rangle$ אם $x, y \in V$ וכל
 $s \in G$ מתקיים: $\langle s x, s y \rangle = \langle x, y \rangle$

* כל הווקטוריות $\langle x, y \rangle$ אוניטרי

הערה:

אם $\mathbb{C}$, חבורה G סופית והווקטוריות V בגודל V , אז
תקיים או $\langle x, y \rangle$ אם אין בה תת-חבורה יזיקים.

השפט:

כל הווקטוריות $\langle x, y \rangle$ סבס ישר של הווקטוריות או פריקות.

הערה:

יהיו V_1, V_2 חבורות ווקטוריות, אז W חבורה:

$$V_1 \times V_2 \longrightarrow W$$

$$(x_1, x_2) \longrightarrow x_1 \otimes x_2$$

ייתכן $\langle x, y \rangle$ חבורה V_1, V_2 אם מתקיים:

$$(1) \quad x_1 \otimes x_2 \text{ הוא תוצאה של חבורה}$$

$$(2) \quad \text{אם } \{e_i^1\} \text{ בסיס של } V_1 \text{ ו- } \{e_i^2\} \text{ בסיס של } V_2, \text{ אז}$$

$$\{e_i^1 \otimes e_j^2\} \text{ בסיס של } W$$

$$V_1 \otimes V_2 \text{ חבורה יזיק}$$

(2)

הצבה:

ההינתן שתי הצבות $f_1: G \rightarrow GL(V_1)$, $f_2: G \rightarrow GL(V_2)$ של אותה חבורה G , נבדיר הצבה חדשה:

$$f: G \rightarrow GL(V_1 \otimes V_2)$$

$$f_s(x_1, x_2) = f_1^s(x_1) \otimes f_2^s(x_2)$$

הצבה:

יהי V מרחב וקטורי, ויהיו $e_1, \dots, e_n$ בסיס. נבדיר הצבה חדשה:

$$\theta: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$$

$$\theta(e_i \otimes e_j) = e_j \otimes e_i$$

ונקבע ישירות כי $\theta(v_i \otimes v_j) = v_j \otimes v_i$ (בו הצבה של C_2)

הצבה:

מרחב V כלשהו נבדיר את הריבוע הסידורי ואת ריבוע

החילופין של V :

$$\text{Sym}^2(V) = \{x \in V \otimes V \mid \theta(x) = x\}$$

$$\text{Alt}^2(V) = \{x \in V \otimes V \mid \theta(x) = -x\}$$

למה:

$$V \otimes V = \text{Sym}^2(V) \oplus \text{Alt}^2(V)$$

הצבה:

נתתי $f: G \rightarrow GL(V)$ הצבה. לכל $s \in G$ נבדיר:

$$\chi_f(s) = \text{Tr}(f_s)$$

ההצבה $\chi_f: G \rightarrow \mathbb{C}$ נקראת הכרוטר של ההצבה f .

למה:

אם χ הוא הכרוטר של הצבה f בגודל n אז:

$$\chi(1_G) = n \quad (1)$$

$$\chi(s^{-1}) = \overline{\chi(s)} \quad (2)$$

$$\chi(\text{st}^{-1}) = \chi(s) \quad (3)$$

טענה:

תהינה: $f_1: G \rightarrow GL(V_1)$, $f_2: G \rightarrow GL(V_2)$ ויהי χ_1, χ_2

ההצגות האלו, אז:

(1) ההצגה של $f_1 \otimes f_2$ הוא $\chi_1 + \chi_2$

(2) ההצגה של $f_1 \otimes f_2$ הוא $\chi_1 \cdot \chi_2$

טענה:

בהינתן הצגה $f: G \rightarrow GL(V)$ טר כהצגה χ (נסמן את

ההצגה של $Sym^2(V)$ כטר $\chi^{(2)}$ ואת ההצגה של

$Alt^2(V)$ כטר $\chi^{(2)}$ אז:

$$\chi^{(2)}(s) = \frac{1}{2} (\chi(s)^2 + \chi(s^2))$$

$$\chi^{(2)}(s) = \frac{1}{2} (\chi(s)^2 - \chi(s^2))$$

הצגה:

יהיו (V_1, f_1) , (V_2, f_2) הצגות של G . $f: V_1 \rightarrow V_2$ היא

קומוטורפיזם אם לכל $s \in G$ מתקיים:

$$f \circ f_s = f_s \circ f$$

מתקיים הצגה הקומוטטית:

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{f_1} & V_1 \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ V_2 & \xrightarrow{f_2} & V_2 \end{array}$$

טענה (עזרת נוסח):

אם $\mathbb{C}$ יהי $f: (V_1, f_1) \rightarrow (V_2, f_2)$ קומוטורפיזם של הצגה

אז פריקור אז:

(1) אם f_1, f_2 אינן איזומורפיות, $f = 0$

(2) אם $f_1 \cong f_2$ אז $V_1 \cong V_2$ אז $f = \lambda Id_V$ עבור $\lambda \in \mathbb{C}$ כושר.

3

הסתרה: נניח כי $(V_1, f_1), (V_2, f_2)$ הצבות או פרוקט של G .

תהי $h: V_1 \rightarrow V_2$ התקה פנימיות. (גדיר:

$$h^0 = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} (f_2^t)^{-1} h f_1^t$$

כאשר $g = |G|$ אולי:

1) אם f_1, f_2 אינן אוניטוריות אז $h^0 = 0$

2) אם $f_1 = f_2$ ו- $V_1 = V_2$ אז h^0 הוא הומומורפיזם של V

$$h_\lambda(x) = \lambda x, \quad \lambda = \frac{1}{\dim V} \text{Tr}(h)$$

הצבה:

יהיו שתי פונקציות ϕ, ψ מחבורה G אל $\mathbb{C}$ אל $\mathbb{C}$

(גדיר:

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \phi(t) \psi(t^{-1})$$

ואנפסה פנימיות:

$$(\phi, \psi) = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \phi(t) \overline{\psi(t)}$$

משפט:

1) אם χ כרקטר של הצבה או פרוקט, אז $(\chi, \chi) = 1$

2) אם χ, χ' כרקטרים של שתי הצבות או פרוקט-לא אוניטוריות

אז $(\chi, \chi') = 0$

משפט:

תהי V הצבה פנימית של G עם כרקטר ϕ . נניח כי V

מתפרק לסכום ישיר של התקות: $V = \bigoplus_{i=1}^k W_i$

כנוסף, תהי W התקה אז פרוקט עם כרקטר χ .

אז, מספר ההצבות W_i שאינן מורפיות להצבה W הוא

בדיוק (ϕ, χ) .

הסתרה:

כיות ההצבות W_i שאינן מורפיות להצבה W אינן תמיד בפרוק.

הסקנה:

שתי הצעות הם אותו כרטיס הן איזומורפיות

יהיו $W_1, \dots, W_h$ מהצעות החד פרוקט של G , ויהיו $\chi_1, \dots, \chi_h$

הכרטיסים שלהם. כל הצעה V של G איזומורפית למסב

הישר $m_1 W_1 \oplus \dots \oplus m_h W_h$ עבור $m_1, \dots, m_h$ כולסוק.

הכרטיס ϕ של V היא $\sum m_i \chi_i$. כעת מתקיים:

$$(\phi, \phi) = \sum_{i=1}^h m_i^2$$

משפט:

אם ϕ הקרטיס של הצעה $V \neq 0$, אז (ϕ, ϕ) הוא שלם חיובי

וכן $(\phi, \phi) = 1$ אם V אי פרוק.

הצבה:

יהי V א'ו תהי $\{e_t \mid t \in G\}$ בסיס של V . (אזכור אור

ההצבה המסלולית R : $f_s e_t = e_{st}$

טענה:

הכרטיס r_G של R הוא:

$$r_G(t) = \begin{cases} g & t = 1 \\ 0 & t \neq 1 \end{cases}$$

הסקנה:

כל הצעה אי פרוק W_i איננה כפויק ההצבה המסלולית של

היסקו. השווה למידר שלה n_i .

הסקנה:

כרטיסו המסלולית; מתקיים:

$$\sum_i n_i^2 = g \quad (1)$$

$$\sum_i n_i \chi_i(s) = 0 \quad \text{אם } 1 \neq s \in G \quad (2)$$

(4)

הצגה:

נוח כי קדימי הצגות אב פריקור של G , $W_1, \dots, W_n$. תנאי.
הכרחי ואספיק לכך שיהיו כל ההצגות האב פריקור הוא שסכום
ריבועי האידיות הוא $|G|$.

הצגה:

פונקציה $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ נקראת פונקציה אחידה אם לכל $s \in G$,
מתקיים:
 $f(stst^{-1}) = f(s)$.

טענה:

תהי f פונקציה אחידה על G , חבורה מסדר g . תהי
 $\chi \in \chi(G)$ הצגה פרימלית של G . (אזר הדרתה פרימלית)
אז V :

$$f_f = \sum_{t \in G} f(t) \chi_t$$

אם f הצגה אב פריקור אחידה אז כקט χ , אז
 f_f הוא המסלול החדר $\chi | \Delta_V$ עבור:
 $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{t \in G} f(t) \chi(t) = \frac{g}{n} (f, \chi)$

משפט:

$\chi_1, \dots, \chi_n$ הם בסיס אורתונורמלי של M - הדר פונקציות
האחידות של G .

משפט:

מספר ההצגות האב פריקור הוא אינבולונט של חבורה G
הוא כמספר האחידות הצמודות של G .

טענה:

יהי $s \in G$ ונסמן בתור $c(s)$ את כמות האופקים באחידות
הצמודות של s .

$$\sum_{i=1}^n \overline{\chi_i(s)} \chi_i(s) = \frac{g}{c(s)} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n \overline{\chi_i(s)} \chi_i(t) = 0 \quad (2) \text{ עבור } t \in G \text{ שאינו צמוד של } s, \text{ מתקיים}$$

הצבה:

תהי $(V, \mathcal{G})$ הצבה אינארית של G . יהיו $\chi_1, \dots, \chi_n$ הכריזמים של $W_1, \dots, W_n$ ההצבות האי-פריקות של G ,
כאן $\chi_1, \dots, \chi_n$ נכתוב $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$

פירוק של V להצבות אי-פריקות. (טענה)

$$I_i = \{ j \mid U_j \cong W_i \}$$

$$V_i = \bigoplus_{j \in I_i} U_j$$

(טענה) את הפירוק הקנוני של V מתייחס:

$$V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$$

משפט:

(1) הפירוק הקנוני $V = \bigoplus V_i$ לא תלוי בפירוק המקורי $V = \bigoplus U_i$

(2) ההצבה $P_i: V \rightarrow V_i$ נתונה על ידי נוסחה שתלוייה רק בחבורה G

וההצבה $f: G \rightarrow \mathcal{G}(V)$

$$P_i = \frac{n_i}{g} \sum_{t \in G} \overline{\chi_i(t)} f(t)$$

משפט:

התנאים הבאים שקולים:

(1) G אבליה סופית

(2) כל ההצבות האי-פריקות של G הן אבליה 1.

טענה:

אם G חבורה אבליה, לאו דווקא סופית, אזי כל ההצבה

אי-פריקה של G היא אבליה 1.

הסקנה:

תהי A תת-חבורה אבליה של חבורה G מסדר $|A| = a$

$|G| = g$ אזי החלפה של כל ההצבה אי-פריקה של G היא

מרחב הוורט האונברסל של A בתוך G , $[G:A] = \frac{g}{a}$

(5)

הערה:

תהי $G = G_1 \times G_2$, $f_1: G_1 \rightarrow GL(V_1)$, $f_2: G_2 \rightarrow GL(V_2)$

(טענה): $f: G \rightarrow GL(V_1 \otimes V_2)$

$$f(s_1, s_2) = (f_1 \otimes f_2)(s_1, s_2) = f_1(s_1) \otimes f_2(s_2)$$

הוכחה:

(1) אם $f_1: G_1 \rightarrow GL(V_1)$ ו- $f_2: G_2 \rightarrow GL(V_2)$ הן הצגות או פירקות
אזי ההצגה של $f_1 \otimes f_2$ על $G_1 \times G_2$ היא או פירוקה.

(2) כל הצגה על $G_1 \times G_2$ (והצגות כסגורות) של G_1, G_2
הצגה או פירוקה — f_1, f_2 של G_1, G_2 .

הערה:

אחרים כי ההצגה f של G בהרחב V מוגדרת על ידי
הצגה θ של M בהרחב W או התקיים:

$$V = \bigoplus_{\tau \in G \setminus M} W_\tau$$

בפרט, התקיים: $\dim V = [G:M] \dim W$