

30/10/2017

הרצאה #2

מרחקים, תכונות

הוכחה:

יהי X מרחב האובדורף (Hausdorff) ונתון כי X הוא

$$X = \bigcup_{i=0}^{\infty} U e_i^2 \quad \text{איוחוד ב-}$$

הוא פתוח $I_0 \neq \emptyset$ ו- q מיוחד

כך שכל i, q קיימת $\varphi_i^q: D^2 \rightarrow X$ כך ש-

$$\varphi_i^q|_{\text{Int}(D^2)}: \text{Int}(D^2) \xrightarrow{\sim} e_i^2$$

הומיאורפיזם

מרחב "מיוחד":

$$\partial e_i^2 = \bar{e}_i^2 \setminus e_i^2 \subset \{q \mid q \text{ הוא מיוחד}\} \quad (C)$$

$$\forall i, q, \bar{e}_i^2 \cap F \cap \bar{e}_i^2 \neq \emptyset \iff F \cap X \neq \emptyset \quad (W)$$

תכונות אפוסטוליות:

למה 1:

אפוסטוליות (W) היא ה"כ"י של φ_i^q אפוסטוליות שבהן כל ההתקנות φ_i^q רציפות.

ההתקנות
שונות
יחסית

הוכחה:

נניח שנתון $X = \bigcup U e_i^2$, $\varphi_i^q: D^2 \rightarrow X$ רציפות. פיר
 $F \cap X \neq \emptyset$ מוכח כי $F \cap \bar{e}_i^2 \neq \emptyset$?

למה 2:

$$\varphi_i^q(D^2) = \bar{e}_i^2$$

הוכחה:

D^2 קומפקט, ולכן $\varphi_i^q(D^2)$ קומפקט. $\varphi_i^q(D^2) \subseteq \bar{e}_i^2$ מוכח
 $\bar{e}_i^2 \subset \varphi_i^q(D^2)$ (סתם) כי $D^2 \supset (\varphi_i^q)^{-1}(\bar{e}_i^2)$ מוכח

$$D^2 \supset (\varphi_i^q)^{-1}(\bar{e}_i^2) \supset (\varphi_i^q)^{-1}(e_i^2) = \text{Int } D^2$$

הכנה:

X מרחב וקטורי, ACX סדרה (מראות) מת מרחב וקטורי
 A מטריצה - אינברס של מטריצה

המשפט:

$$X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^n \subset \dots \subset X$$

$Ue^0 \quad Ue^1 \quad Ue^2$

$$e^0 \cup e^1 = S^1$$

$2e^0 \cup 2e^1 \cup \dots \cup 2e^n$



(2) (קוביות) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100

$$D^n = \underbrace{e^0 \cup e^{n-1}}_{S^{n-1}} \cup e^n$$

$$(x_0, \dots, x_n) \quad \mathbb{R}P^n = e^0 \cup e^2 \cup \dots \cup e^n$$

$(x_0 = \dots = x_{n-1} = 0, x_n \neq 0) \dots (x_0 \neq 0, x_1 = \dots = x_n = 0) \dots (x_0 \neq 0, x_1 \neq 0, x_2 = \dots = x_n = 0)$

$$\mathbb{C}P^n = e^{2n} \cup e^{2n-2} \cup \dots \cup e^2 \cup e^0$$

$$\mathbb{R}^n =$$

$$(S^1 \text{ אנטוויקיט}) \quad \dots \cup 2e^1 \cup \dots \cup 2e^1 \cup 2e^0 = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n = S^{\infty} \quad (7)$$

$? = D^{\infty}$

$$\dots \cup e^n \cup \dots \cup e^2 \cup e^1 \cup e^0 = \mathbb{R}P^{\infty} \quad (8)$$

$$\dots \cup e^{2n} \cup \dots \cup e^2 \cup e^1 \cup e^0 = \mathbb{C}P^{\infty} \quad (9)$$

Schubert: $Gr(k, n)$ (10)

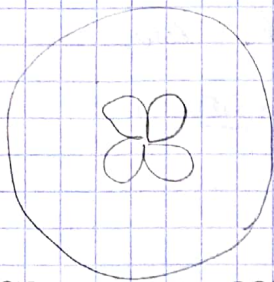
$$Z \in Gr(k, n) \rightarrow A_{k \times n} \rightarrow A_{k \times n}^c \left(\begin{array}{c} \boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \boxed{4} \\ \boxed{5} \quad \boxed{6} \quad \boxed{7} \quad \boxed{8} \end{array} \right)$$

Young: k

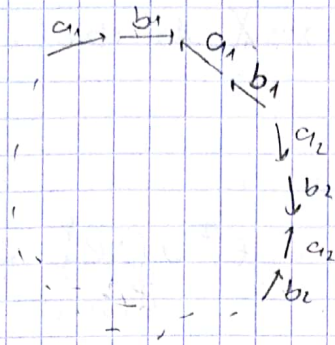
(כמות צורה מרחבת קוונט)

(11) משטחים סגורים S^2

(12) מנצבים

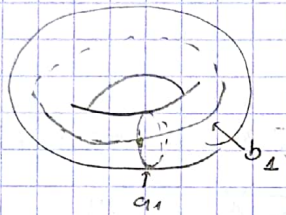


ספירה עם n חורים
שדוקרים להם טווחים

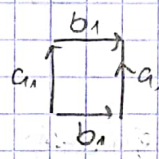


S_n^2 הוא הדנה
 $a_1 \mapsto a_1$
 $b_1 \mapsto b_1$

$e^2 \cup a n e^2 \cup e^0$ (1) + (2) + (3)

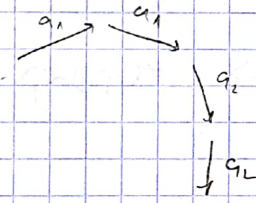


$\Leftarrow$



$n=1$: הדנה

an מצב



$\underbrace{RP^2 \# \dots \# RP^2}_n$ (12)



$n=1$: הדנה

דנה 2 :

(C), (W) כמות תלויות

הוכחה :

$X = D^2$ ונסתכל על שתי חלוקות :

(1) $D^2 = \text{Int}(D^2) \cup \bigcup_{x \in S^1} \{x\}$ כחור שכאן (C) על התחום

אבל ש - (W) כן התחום

(2) $D^2 = \{o\} \cup \bigcup_{x \in S^1} \overset{\text{קוויסים}}{U(o,x)} \cup \bigcup_{x \in S^1} \{x\}$ כחור ש - (C) התחום

אבל (W) על : הדנה :



דוגמה 3:

X הרחב הוא . אבל כל $x \in X$ נמצא סתת-הרחב הוא סופי

$$x \in A \subset X$$

הוכחה:

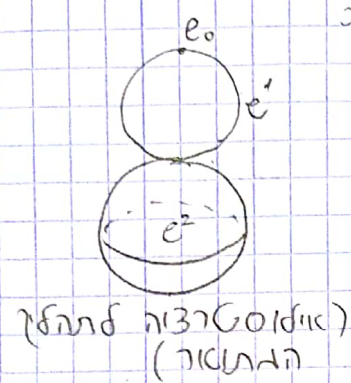
$$x \in e_i^2 \subset \bar{e}_i^2 \subset e_i^2 \cup \bigcup_{j \neq i} e_j^2 \subset \bigcup_{j=1}^p e_j^2$$

(איחוד סופי)

$$\subset e_i^2 \cup (\bigcup_{j \neq i} \bar{e}_j^2) \subset \dots \subset$$

איחוד סופי

(מש"ן בתהליך אינדוקטיבי עד $p=0$)



משפט:

1) X הרחב הוא , $K \subset X$ קומפקטית , אבל קיים תת-הרחב

$$K \subset A \subset X \quad A \text{ סופי}$$

2) הרחב הוא קומפקט $\iff$ הוא קלף לבנה הוא סופי .

הוכחה:

$K \subset X$ קומפקטית (נבנה סדראות שהיא חותך רק גססר סופי)
 של תאים ואל נקבע את A סתת-הרחב אינדוקטיבי (בהם סתת-הרחב)
 כלל הוא e_i^2 כן ש - $e_i^2 \cap K \neq \emptyset$ נקח קופסה $e_i^2 \cap K \neq \emptyset$
 $y = \{x_i^2\}$, y סגור , $y \cap \bar{e}_j^2$ סופי (ולכן סתת-הרחב סגור)
 כלל $\mathbb{Z} y$ סגור (באותו הדבר) ולכן y דיסקרטית
 ולכן y סופית .

משפט:

כל הרחב הוא העני (נרמל) (כלל $F, G \subset X$ סגורות ברות)
 קידום סגורות ברות $F \subset U$, $G \subset V$ כן ש - $U \cap V = \emptyset$

הוכחה:

סוגי את U, V באינדוקציה ראית . הנוונה : יסתכל כלל
 הסימטריות :

(כלל סגור סופי)

$$X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^n \subset \dots \subset X$$

$$\text{פתוחות: } U^0 \subset U^1 \subset \dots \subset U$$

$$\text{פתוחות: } V^0 \subset V^1 \subset \dots \subset V$$

$$G \cap X^n \subset V^n \quad -1 \quad F \cap X^n \subset U^n \quad \text{כן יש}$$

$$V = \bigcup V^n \quad -1 \quad U = \bigcup U^n \quad \text{ואז}$$

נסו:

$$V^0 = G \cap X^0, \quad U^0 = F \cap X^0$$

עצב

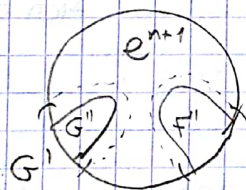
סתמי
אלהי

$$U^n \cap V^n = \emptyset, \quad V^n \supset G \cap X^n, \quad U^n \supset F \cap X^n$$

$$D^{n+1} \xrightarrow{\varphi^{n+1}} \underbrace{X^n \cup e^{n+1}}$$

מהו הרחב הטוב
(כך הסבר של e^{n+1} הוביל ב- X^n)

$$D^{n+1} \supset S^n \supset U' \supset F' \\ \supset V' \supset G'$$



סוקחים את הסביבות הטובות ואז
דוחפים אותם סתם $X^n \cup e^{n+1}$
(השתדלים בצורה שכזו
הוא נורמלי)

(מהו בנייה עתה קוצצ e^{n+1})



פערות: (הכפלה, הנה, גלילי, קונוס, התעה)

(א) הכפלה:

X, Y הרחבים תאיים, על $X \times Y$ הופרות 2 טופולוגיות:
טופולוגית הכפלה, טופולוגיה תאיות.

$$X \times Y = \bigcup e_i^x \times \tilde{e}_j^y$$

$$(c) \quad \overline{e_i^x \times \tilde{e}_j^y} = \bar{e}_i^x \times \bar{\tilde{e}}_j^y \quad \text{הצדדים:}$$

ונדרוש גם את (W)

למה:

טופולוגיה תאית היא גדולה גאופולוגית הכפלה.

הוכחה:

שאלה:
יש זה טופולוגיה
תאית?

(סדוק כי כל $U \times V$ פתוחה בטופולוגיה תאית

$$(U \times V) \cap (\bar{e}_i^2 \times \bar{e}_j^3) = (U \cap \bar{e}_i^2) \times (V \cap \bar{e}_j^3)$$

פתוח ה- $\bar{e}_i^2 \times \bar{e}_j^3$



המשפט: (עליו הוכחה)

X, Y מרחבים תאיים והתקיים אחד התנאים הבאים:

התנאי הראשון
הוא שיש פתוחות
מקבילות.

(א) X, Y קומפקטים מקומית (= סופיים מקומית)

(ב) X, Y קצתם גליליים וכל אחד מהם קווי

אזי טופולוגיה הכפלה = טופולוגיה תאית.

הוכחה:

(X, A) אזי X/A כל מרחב תא-
תת מרחב תא- מרחב תא

עלים:

$$X \times I = \text{Cyl}(X) \text{ - מרחב תא (קצת)}$$

(ובתו $\text{Con}(X)$, $S(X)$ (מרחב) הם מרחבים תאיים)

הומוטופיה:

הערה: (הומוטופיה של העתקות)

X, Y מרחבים טופולוגיים, הומוטופיה:

$$H: X \times I \longrightarrow Y$$

רציפה

$$f_t: X \longrightarrow Y$$

$$f_t(x) = H(x, t)$$

שאלה:
האם זה הטופולוגיה
רציפה?

f_0, f_1 נקראות העתקות הומוטופיות והסמנים $f_0 \sim f_1$

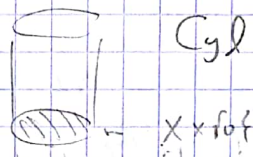
multi 25.00 1.00

(רטרקציה: $\text{inc}: A \hookrightarrow X$, ריטחציה: $\text{z}: X \rightarrow A$ כך ש: $\text{z} \circ \text{inc} = \text{id}_A$)

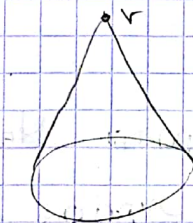
$$(z \cdot)_A = Id \quad \text{u} \quad z \circ in = Id \quad \text{u} \quad z \circ out = Id$$
[illegible]
$$f_* = (X \xrightarrow{\tau} A \xrightarrow{\text{in}} X) \quad , \quad f_v = \text{Id}(X) \quad \text{e} \quad f_t: X \rightarrow X$$

• z.B. $f_t|_A = \text{Id}(A)$ p.d.

זאמאונט פון רעדקציע דפונדאציען:

$$\text{Cyl}(X) \supseteq X \times \{0\} \quad (1c)$$

$$M: \underbrace{X \times I \times I}_{\text{}} \longrightarrow \underbrace{X \times I}_{\text{}}$$
$$(x, t, s) \mapsto H(x, t, s) = (x, t(1-s))$$

+1011 fctadf קצת מה $\rightarrow$ a  : Möbius טור (2)


$$: (01117) \text{ Con}(X) (c$$
$$\{v\} \subset \text{Con}(X)$$

לוח: רטרקציה דפורה צונית

• הסבר - האינרציה הזווטית $I(X)$ יכולה להיות ∞ (אבל)

את הקסיס ואפשר לעשות את זה כי $(f_t|_{\text{קסס}} = Id$

הצבה: (הואטופיה יחסית)

$\tau \rightarrow \text{idn} \rightarrow \text{idn} \quad f_t|_A : A \rightarrow Y, \quad f_t : \underset{\substack{\cup \\ A}}{X} \rightarrow Y$

(rel A : PINON)

דוגמה:

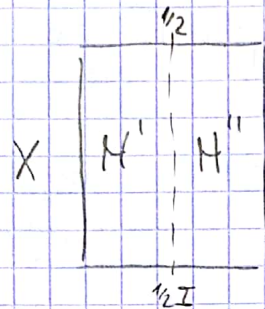
הומוטופיה בין שני פונקציות $C(X, Y)$

הוכחה:

כדי להוכיח הומוטופיה נבחר: $H(x, t) = f(x)$ (רפלקסיות)

סימטריה: $\tilde{H}(x, t) = H(x, 1-t)$

טרנזיטיביות: $f_0 \stackrel{h}{\sim} f_1 \stackrel{h}{\sim} f_2$



$$H(x, t) = \begin{cases} H'(x, 2t) & , 0 \leq t \leq 1/2 \\ H''(x, 2t-1) & , 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

■

כעת אפשר להגדיר חדוואות שקילות: $\pi(X, Y)$

$C(X, Y, Z) = C(X, Y) \times C(Y, Z)$
 תרגום (אבסטרקט)
 ← C של C (שנייה)

דוגמה:

אם X Hausdorff וקומפקט אז $\pi(X, Y)$ הוא

קבוצת רכיב קשירות הסימטריה $C(X, Y)$

מה זה רכיב קשירות?
 תשובה: $\sim$ (שנייה)

הערה: (שקילות הומוטופיה)

$f: X \rightarrow Y$ נקראת שקילות הומוטופיה אם קיים

$Id(Y) \stackrel{h}{\sim} f \circ g: Y \rightarrow Y$ ש $g: Y \rightarrow X$

$Id(X) \stackrel{h}{\sim} g \circ f: X \rightarrow X$

דוגמה:

אם f הומוטופיה פונקציה $f: X \rightarrow Y$

$\tau: X \rightarrow A$, $in: A \hookrightarrow X$

$$\tau \circ in = Id(A), \quad in \circ \tau = f_1 \sim f_0 = Id(X)$$