

מספרים מרוכבים

$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$ שדה המרוכבים

יש הרחבה של השדה $\mathbb{R}$

$\mathbb{R} = \{a + i \cdot 0\} \subset \mathbb{C}$ איז אסטרקטור של $\mathbb{R}$ כשדה שדה של $\mathbb{C}$

סימנים: $\operatorname{Re}(a + ib) = a$ חלק ממשי
 $\operatorname{Im}(a + ib) = b$ חלק מדומה
 $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ערכ מוחלט
 $\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$ הצמוד

תכונות:
 $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
 $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
 $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$
 $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

סדרות

$z_n = a_n + ib_n$, $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$

אם $a_n \rightarrow a$ ו- $b_n \rightarrow b$ נאמר ש- $z_n \rightarrow z = a + ib$

מצד שני, אם $z_n \rightarrow z$ אז $\operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \operatorname{Re}(z)$ ו- $\operatorname{Im}(z_n) \rightarrow \operatorname{Im}(z)$ (התאמה)

סדרת טור

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ התכנסות הטור שקורה להתכנסות של $\{c_n z^n\}$ ומתרחשת בדיוק סביב z_0 .

מחש - יהי $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ($c_n \in \mathbb{C}$) ונניח שהטור מתכנס בקנה z_0 .
 נסמן $R = |z_0|$. אזי הטור מתכנס בהחלט ובמס' R לכל z כך ש- $|z| < R$.

כלומר קיימת פונקציה $f: D_R \rightarrow \mathbb{C}$ כך ש-
 $\forall (\epsilon > 0), \exists (N \in \mathbb{N}), \forall (n > N), [\sup_{z \in D_R} |S_n(z) - f(z)| < \epsilon]$

מסלול קושי הזמר - יהי $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ נגזר

$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$ ($\frac{1}{\infty} = 0, \frac{1}{0} = \infty$)

- 1) הטור מתכנס בהחלט ב- $|z| < R$
- 2) ב- $|z| = R$ הטור מתכנס במס' R
- 3) הטור לא מתכנס ב- $|z| > R$

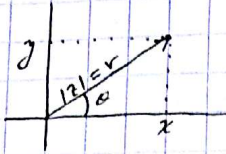
צולמה - $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ - הטור מתכנס במס' בכל ציר, סדר ומתכנס ב- $\mathbb{C}$

מתקיים $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$

נשים לב - $e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos x + i \sin x$

וקיבלנו את נוסחאות אוילר - $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

הצגה של חית של מספר מרוכב



$$z = x + iy = r e^{i\theta}$$

$$r = |z|$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

כשישם דף, זה עובד רק כש- x אינו צריך להוסיף כיתה π כדי שיהיה שטותי.

$$(r_1 \cdot e^{i\theta_1})(r_2 \cdot e^{i\theta_2}) = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\overline{r \cdot e^{i\theta}} = r e^{-i\theta}$$

תרגיל

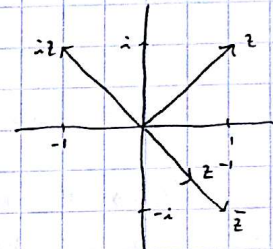
$$\bar{z}, z^2, z^{-1}, iz \quad \text{חשבו וציירו את } z = 1 + i$$

$$\bar{z} = 1 - i, \quad iz = i + i^2 = i - 1$$

$$z = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad iz = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$z^2 = 2 e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$$

$$z^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$



$$\frac{1}{z} = \bar{z} \quad \longleftrightarrow \quad \text{תרגיל} \quad \text{ז של ממשל היחידה}$$

$$z = e^{i\theta} \quad \leftarrow \quad |z| = 1 \quad \text{הוכחה}$$

$$\bar{z} = e^{-i\theta} = \frac{1}{z}$$

$$\bar{z} = r e^{-i\theta}$$

$$z = r e^{i\theta}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \cdot e^{-i\theta}$$

$$\rightarrow \quad r = 1$$

$$\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$$

$$\text{תרגיל} \quad \text{הוכחה}$$

$$e^{\overline{x+iy}} = \overline{e^{x+iy}} = \overline{e^x \cdot e^{iy}} = \overline{e^x} \cdot \overline{e^{iy}} = e^x \cdot e^{-iy} = e^{x-iy} = e^{\bar{z}}$$

$$e^z = 1$$

$$\text{תרגיל} \quad \text{פתור}$$

$$|e^z| = 1 \quad \text{אז} \quad |e^z| = e^x \quad \rightarrow \quad x = 0$$

$$e^{-iy} = 1 = \cos y + i \sin y = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin y = 0 \\ \cos y = 1 \end{cases} \Rightarrow z = 2\pi i k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

נשים - סדר

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin(\alpha + \beta), \cos(\alpha + \beta)$$

הכנסה
לכ"ח

$$e^{i(\alpha + \beta)} = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

$$\parallel$$

$$e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) =$$

$$= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta)$$