

מכפלה פנימית

הצדקות - V מ"ו ע"נאר מע"ס.

מכפלה פנימית: $f = \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ המקיימת:

$$(1) \quad \langle w, w \rangle \geq 0, \quad \langle w, w \rangle = 0 \iff w = 0$$

$$(2) \quad \langle w + v, u \rangle = \langle w, u \rangle + \langle v, u \rangle$$

$$(3) \quad \langle \alpha w, u \rangle = \alpha \langle w, u \rangle$$

$$(4) \quad \langle w, u \rangle = \overline{\langle u, w \rangle}$$

קואורדינטות - $u = (u_1, \dots, u_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$: $\mathbb{C}^n$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k$$

ב- $R(\pi)$ מרחב הפונ' אינ' היינ ב- $[-\pi, \pi]$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

* אם מעשה זו חצי מכפלה פנימית כי החלק הע"י של אקזומה $\neq$ לא מתקיים

טענה - אם $x_1, \dots, x_n \in V$ במרחב מכפלה פנימית (מ.פ.) אורתוגונלים אזי טעני כלומר

$$\langle x_j, x_k \rangle = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ c_j & k = j \end{cases}, \quad c_j > 0$$

אז מתקיים - $x_1, \dots, x_n$ בת"ס.

הוכחה - נניח בשלילה שקיימים $a_1, \dots, a_n$ שכלם 0, כך $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ אז:

$$0 = \langle x_j, a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \rangle = \sum_{k=1}^n \bar{a}_k \langle x_j, x_k \rangle = \bar{a}_j \cdot c_j$$

בשל $c_j > 0$, $\bar{a}_j = 0$, סתירה!

הצדקה - טרמה של מ"ו ע"נאר V היא פונקציה $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת:

$$(1) \quad \|w\| \geq 0, \quad \|w\| = 0 \iff w = 0$$

$$(2) \quad \| \alpha w \| = |\alpha| \|w\|$$

$$(3) \quad \|w + u\| \leq \|w\| + \|u\|$$

* נשים לב של מרחב מ.פ. הוא מרחב טרמי עם הנורמה הנובעת - $\|w\| = \sqrt{\langle w, w \rangle}$

* לא כל טרמה היא טרמה מותרת.

זוגות - (1) : $\mathbb{C}^n$ $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$

$$\|x\|_2 = (\sum |x_j|^2)^{1/2}$$

$$\|x\|_p = (\sum |x_j|^p)^{1/p}, \quad 1 \leq p$$

$$p = \infty \Rightarrow \|x\| = \max_{j=1, \dots, n} |x_j|$$

$$\|f\|_p = (\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx)^{1/p} \quad : R(\pi) \text{ (2)}$$

טענה - אי שיוויון ב'ט' (Bessel) $(\delta, n.m.)$ איז נאך v איז נאך $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$ איז טראנסאט

$$\langle e_j, e_k \rangle = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1 & k = j \end{cases}$$

$$\forall v \in V, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\langle v, e_j \rangle|^2 \leq \|v\|^2 \quad \text{איז:}$$

הוכחה - לקח $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|v - \sum_{j=1}^n \langle v, e_j \rangle e_j\|^2 = \\ &= \langle v - \sum_{j=1}^n \langle v, e_j \rangle e_j, v - \sum_{j=1}^n \langle v, e_j \rangle e_j \rangle = \\ &= \|v\|^2 - \langle \sum_{j=1}^n \langle v, e_j \rangle e_j, v \rangle - \langle v, \sum_{k=1}^n \langle v, e_k \rangle e_k \rangle + \langle \sum_{j=1}^n \langle v, e_j \rangle e_j, \sum_{k=1}^n \langle v, e_k \rangle e_k \rangle \\ &= \|v\|^2 - \underbrace{\sum_{j=1}^n \langle v, e_j \rangle \langle e_j, v \rangle}_{\sum_{j=1}^n |\langle v, e_j \rangle|^2} - \underbrace{\sum_{k=1}^n \overline{\langle v, e_k \rangle} \langle v, e_k \rangle}_{\sum_{k=1}^n |\langle v, e_k \rangle|^2} + \underbrace{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \langle v, e_j \rangle \overline{\langle v, e_k \rangle} \langle e_j, e_k \rangle}_{\sum_{j=1}^n |\langle v, e_j \rangle|^2} = \\ &= \|v\|^2 - \sum_{j=1}^n |\langle v, e_j \rangle|^2 \end{aligned}$$

הא שיוויון הנ"ל נכון ע"פ n ואם $n \rightarrow \infty$

סקנה - אי שיוויון קושי-הולדר

$$\forall u, w \in V, \quad |\langle w, u \rangle| \leq \|w\| \cdot \|u\|$$

הצגה - בהינתן סדרה $\{f_n\} \subset R(\pi)$ ותהי $f \in R(\pi)$
 נאמר כי f_n מתכנסת בערכה δ - f
 $\|f_n - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
 מסמנים $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f$

* ביחס לערכה L^2 והמרחב $R(\pi)$ הנזכר בערכה L^2 נקבע ביחידות
 אלה רק δ כי פונ' ביחידות טרמה 0

$$\|f_n\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2 dx$$

תרשים - תהי $\{f_n\} \subset R(\pi)$, $f, g \in R(\pi)$, כך ש- $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f$, $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} g$
 איז $\|f - g\|_{L^2} = 0$

$$\|f - g\| \leq \|f - f_n\| + \|f_n - g\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{הוכחה -}$$

$f = g$ $\leftarrow$ f, g רציפות נקבה