

תוכנית:

סימנים מסדר ראשון:

- תחביר

- Σ - מילון - אוסף של קבוצות, סימני פונקציות + כמה אריתמטיקה, סימני יחס + כמה אריתמטיקה- שפה מילון Σ - איסוף כות Σ

(1) משתנים

(2) סימני פונקציה "(", ")", ",", "

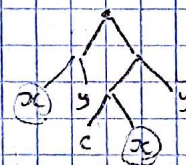
(3) קבוצות פונקציות $\rightarrow, \mapsto, \vdash$ (4) כמות $\forall, \exists$ - ישירות בצד מילון Σ : נכתב λ - קבוצת משתנים בעלת סימני פונקציה: $f(,), f(c, f(x, c))$ - נוסחאות מילון Σ : אריתמטיקה - $R(t_1, t_2) \rightarrow$ סימני יחס

(נוסחאות) נקודות אריתמטיקה בעלת קשרים פונקציונליים וכתמים

- תבנית של משתנים / מופעים:

binder או קושר
bound או קשור
free / חופשי

- שפה של נוסחה

- הצגות קשר בצד $\{ \frac{t_1}{x} \}$ - כל ביטוי בקור t :

- הצגה בנוסחאות - כפי שראינו בשיעור שלפני

כמות שפה - כללי חיסכון בסוגריים:

(א) כמו בתחשיב הפסוקים + בקור כמות:

(ב) תוך של כמות הולך הכי רחוק ימנה:

$$\forall x. R(x, y) \wedge \forall z. R(z, x) \mapsto \forall x. (R(x, y) \wedge \forall z. R(z, x))$$

$$(\forall x. \neg R(x, y)) \wedge \forall z. R(z, x) \mapsto (\forall x. (\neg R(x, y))) \wedge \forall z. R(z, x)$$

סימנים:

השתנים במטה שפה:

(1) $\psi, A, B, C, \varphi, \psi$ - נוסחאות

(2) שמות עצם - t, t_1, t''

(3) משתנים: x'', x, y

(4) עבור קבוצים: a, b, c, z_3

(5) עבור סימני פונקציה: f, g_3, h''

(6) עבור סימני יחס: R, G, H

סמנטיקה: (השלכות)

מה הערך של $\forall x R(x, a)$? תלוי בפרוש של R ותחום

$M = (D^M, C^M, f^M, R^M)$			
תחום	קבוצה	פרוש של פונקציה	פרוש של יחס
D	C	f	R

מקנה עבור מילון:

(1) תחום D - קבוצה-על ריקה

(2) פירושים עבור סימנים במילון:

(א) קבוצים - לכל קבוצ C (תאים אוכל אוכל תחום

(ב) סימני יחס $R(,)$, (תאים תת קבוצה של $D \times D$

$G(,)$, (תאים תת קבוצה של D

(ג) סימני פונקציה $f(,)$, (תאים פונקציה $D \rightarrow D$

$g(,)$, (תאים פונקציה $D \times D \rightarrow D$

דוגמאות: מקנים עבור $\Sigma = \{C, f_1(,), f_2(,), R(,)\}$:

(א) D מספר טבעיים | (ב) מספרים משיים D

פרוש של C - מספר 0 | פירוש של C - מספר 0

פרוש של f_1 - פונקציה חיבור | פירוש של f_1 - פונקציה חיבור

פרוש של f_2 - פונקציה כפל | פירוש של f_2 - פונקציה כפל

פרוש של R - יחס "הסן" | פירוש של R - יחס קטן

עבור תוסחה: $\forall x \exists y R(x, y)$. נוסחה זו היא true במקרה

1 - false במקרה אחר

(ג) תחום - תתי קבוצות של טבעיים

c - קבוצה ריקה

f_1, f_2 - איחוד וחיתוך של קבוצות

R - מפורש כיחס הכלה המש

- הנוסחה $\forall x \exists y R(y, x)$ תקפה בזר false במנה $\bar{e}$

1- true במנה $\bar{e}$

- הנוסחה: $\exists x. R(x, f_2(x, x))$ - מקבל true ב- $\bar{e}$ false ב- $\bar{e}$

(3) תחום - המרחבות של $\{0, 1\}$ שמתחילת ב- 1, ומחלפת "0"

c - מרחבת "0"

f_1 - מפורשת כחבור בינארי $(f_1(101, 11) = 1001)$

f_2 - כפל בינארי

R - סדר "לסקינרס" (או יחס "קטן" בינארי)

- הנוסחה $\forall x. R(x, f_2(x, x))$ מקבל true ב- $\bar{e}$ false ב- $\bar{e}$

אבל או אפשר צמצום בין $\bar{e}$ כי הם בצד "אות מנה"

(הבנים אינדיאנרטיים)

סיכום טיקה

וסקור f

- זר של שם בצד t סמל M - איבר בתחום

- זר של נוסחה במנה M וסקור f - true או false

- סקור f : כלל השתנה בתחום איבר בתחום

סימון: $\llbracket t \rrbracket_g^M$ סקור f - מנה M $\llbracket \varphi \rrbracket_g^M$ סקור f - מנה M (נוסחה)

שם בצד:

בסיס: (א) משתנה x - $f(x)$

(ב) קבוצה c - c^M

מבנה f דו מקומות:

$$\llbracket f(t_1, t_2) \rrbracket_g^M = f^M(\llbracket t_1 \rrbracket_g^M, \llbracket t_2 \rrbracket_g^M)$$

משפט : (Sanity test)

נוח φ ו- φ' סקירות שוות על השתנים שמופיעים ב- t , אז:

$$[t]_{\varphi}^M = [t]_{\varphi'}^M$$

(הוכחה סטנדרטית בקלות)

משפט:

$$[t \{ \frac{t_1}{x} \}]_{\varphi}^M = [t]_{\varphi}^M \underbrace{[\frac{t_1}{x}]_{\varphi}^M}_{\text{סקירה חדשה}}$$

לידון סקירה :

$$\varphi \left[\frac{d}{x} \right] \quad \begin{array}{l} \text{איבר קטחוס} \\ \uparrow \\ \text{השתנה} \end{array}$$

דרך של נוסחה φ בהינתן M וסקירה φ : $([\varphi]_{\varphi}^M)$ סימון

סימנים:

נוסחאות אטומיות : $\varphi := R(t_1, t_2, t_3)$

$$[\varphi]_{\varphi}^M = \begin{cases} \text{true} \\ \text{false} \end{cases} \quad \langle [t_1]_{\varphi}^M, [t_2]_{\varphi}^M, [t_3]_{\varphi}^M \rangle \in R^M$$

אחרת

מבנה אינדוקציה:

$$\varphi \in \{ \wedge, \vee, \neg, \rightarrow \}, [\varphi_1 \circ \varphi_2]_{\varphi}^M = h_{\circ}([\varphi_1]_{\varphi}^M, [\varphi_2]_{\varphi}^M)$$

$$[\forall x. \varphi]_{\varphi}^M = \begin{cases} \text{true} \\ \text{false} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{אם לכל איבר קטחוס } [\frac{a}{x}]_{\varphi}^M \\ \text{אחרת} \end{array}$$

באופן דומה עבור $\exists$

בנייה:

$f(c_0) = 1$	$\sum_{i \in \text{arith}} \{ c_0, c_1, f(i), R(i) \}$	מיון - Maritza
$f(f(c_0)) = 2$		תחום - סקרים
$f(c_1) = 2$	c_1 - פרמטר 1, 0	c_0 - פרמטר 0
$f(x) \{ \frac{f(f(c_0))}{x} \}$		R - מסת
	successor	f - פונקציה עוקבת

$$[\forall x. R(x, y)]_g^{M, \text{arith}} = \text{false}$$

$$[\forall x. R(x, y) \wedge \frac{f(y) \dots f(y)}{y}]_g^{M, \text{arith}} = [\forall x. R(x, y)]_g^{M, \text{arith}} \left[\frac{23}{y} \right]$$

הוכחה:
נניח $g - g'$ סקיות ששוות על השתנה שהופכים חופשי ב- y .
אזי:
$$[\varphi]_g^M = [\varphi]_{g'}^M$$

$$[\varphi \wedge \frac{t_i}{x}]_g^M = [\varphi]_g^M \left[\frac{[t_i]_g}{x} \right]$$

הוכחה: קאונטרפוזיטל חסות.

הכרזה: (אולימורפיזם)

F אולימורפיזם חסות M חסות N כי:

$$F: D^M \rightarrow D^N \text{ חתך וזה}$$

$$F(c^M) = c^N \quad c \text{ קודם}$$

לבד כי סמן יחס R וזה כי אוקים a_1, a_2 כי D^M כי:

$$\langle F(a_1), F(a_2) \rangle \in R^N \iff \langle a_1, a_2 \rangle \in R^M$$

כדי סמן פונקציה f ואוקים a_1, a_2, a_3

$$F(f(a_1, a_2, a_3)) = f(F(a_1), F(a_2), F(a_3))$$

הוכחה:

כי M אולימורפיזם N כי לבד כי נוסח δ שמתם חופשי:

$$[\varphi]_g^M = [\varphi]_g^N \quad (\text{כאשר פאוקים})$$

נניח כי F אולימורפיזם M - N כי g_N, g_M סקיות

"חטאות" על ידי F , כלומר, δ כי $F(g_M(x)) = g_N(x)$ כי:

$$\begin{cases} [t]_{g_N}^N = F([t]_{g_M}^M) \\ [\varphi]_{g_N}^N = [\varphi]_{g_M}^M \end{cases}$$

חוקי סמנטיקה בסיסיים:

(1) נוסחה φ מתפרשת (כונה) M וסביבה ρ אם:

$$[[\varphi]]_{\rho}^M = \text{true}$$

(2) φ סבירה במבנה M אם קיימת סביבה ρ שמספקת את φ ב- M .

(3) φ סבירה אם היא חברה בקו φ סבירה

(4) φ (כונה) במבנה M אם כל סביבה ρ מספקת את φ ב- M .

(5) φ (כונה) / תמידית אם φ (כונה) בכל מבנה.

(6) φ שקולה ל- ψ אם כל מבנה M וסביבה ρ מקבלים את אותו ערך.

3.1.1 חוקי תחבורה:

$$\forall x. R(x) \vee \neg R(x)$$

$$\exists x. R(x) \vee \neg R(x)$$

$$\forall x. R(x) \rightarrow R(x)$$

$$R(x) \vee \neg R(x)$$

(החוקים הבאים כוללים את $R(x)$ ואת הסמל $\neg$ במקום)

$$\forall x. R(x) \rightarrow \exists x. R(x)$$

$$(\neg \forall x. R(x)) \leftrightarrow (\exists x. \neg R(x))$$

$$(\forall x \forall y. \varphi) \leftrightarrow (\forall y \forall x. \varphi)$$

הערות:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{אם } \forall x. \varphi \text{ תמידית אזי: } \varphi \text{ תמידית} \\ \text{ב) } \exists x. \varphi \text{ תמידית} \end{array} \right. \text{ (כיון)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{אם } \forall x. \varphi \text{ תמידית אזי: } \varphi \text{ תמידית} \\ \text{ב) } \forall x. \varphi \text{ תמידית} \end{array} \right. \text{ (כיון)}$$

$$R(x) \leftrightarrow \exists y. R(y) \text{ אבס } \exists x(R(x) \leftrightarrow \exists y. R(y))$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{אם } \exists x. \varphi \text{ סבירה: } \varphi \text{ סבירה} \\ \text{ב) } \forall x. \varphi \text{ סבירה} \end{array} \right. \text{ (כיון)}$$

הוכחה של א

נוני $\exists x. \varphi$ ספיקה ב- M וסבירה φ בס $\mathcal{D}^M$ יש
 $\llbracket \varphi \rrbracket^M \left[\frac{a}{x} \right] = \text{true}$ סבי הסברה, בס φ ספיקה ב- M .

שקוליות (הכללת כמתוס)

$$\neg \forall x. \varphi \equiv \exists x. \neg \varphi$$

$$\neg \exists x. \varphi \equiv \forall x. \neg \varphi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi \wedge \exists x. \psi \equiv \exists x. \varphi \wedge \psi \\ \varphi \vee \exists x. \psi \equiv \exists x. \varphi \vee \psi \\ \varphi \wedge \forall x. \psi \equiv \forall x. \varphi \wedge \psi \\ \varphi \vee \forall x. \psi \equiv \forall x. \varphi \vee \psi \end{array} \right. \text{אם } x \text{ לא מופיע}$$

הסברה

נוסחה ב- PNF (prenex normal form)

$$\boxed{\text{נוסחה שלם כמתוס}} \quad \boxed{\text{כמתוס}}$$

משפט

כל נוסחה שקולה לנוסחה ב- PNF (יש אלגוריתם שזה

הוכחה של כ:

נניח $\exists x. \varphi$ ספיקה ה- M וסמולה φ כן יש $a \in D^M$ כ- φ -
 $\llbracket \varphi \rrbracket^M \left[\frac{a}{x} \right] = \text{true}$ לפי הסברה, כן φ ספיקה ה- M .

סקוליות (המרת כמותות):

$$\neg \forall x. \varphi \equiv \exists x. \neg \varphi$$

$$\neg \exists x. \varphi \equiv \forall x. \neg \varphi$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi \wedge \exists x. \psi \equiv \exists x. \varphi \wedge \psi \\ \varphi \vee \exists x. \psi \equiv \exists x. \varphi \vee \psi \\ \varphi \wedge \forall x. \psi \equiv \forall x. \varphi \wedge \psi \\ \varphi \vee \forall x. \psi \equiv \forall x. \varphi \vee \psi \end{array} \right\} \text{כאן } x \text{ לא מופיע ב- } \varphi$$

הסברה:

נוסחה ה- PNF (prenex normal form):

$$\boxed{\text{כמותות}} \mid \boxed{\text{נוסחה סגורה בלתי כמותית}}$$

משפט:

כל נוסחה סקולית פנומלה ה- PNF (יש אלגוריתם דטרמיניסטי)