

Hilbert Propositional Calculus

Ax1 $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

Ax2 $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

Ax3 $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$

Inference Rules

MP Derive B from A and $A \rightarrow B$.

Some useful provable (in HPC) formulas (ref. Mendelson).

1. $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$
2. $A \rightarrow (B \rightarrow C), B \vdash A \rightarrow C$
3. $A \rightarrow A$
4. $(\neg\neg B) \rightarrow B$
5. $B \rightarrow (\neg\neg B)$
6. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$
7. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$
8. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B)$

Proof of $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$

We show

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \vdash C$$

and then by Deduction Theorem conclude
 $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$.

Proof of $A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \vdash C$

1. $A \rightarrow B$

2. $B \rightarrow C$

3. A

μp 4. B

μp 5. C

Proof of $\vdash (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B))$

We first prove

$$\neg A, A \vdash B$$

1. $\neg A$
2. A
3. $(A \rightarrow (\neg B \rightarrow A))$
4. $(\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A))$
5. $\neg B \rightarrow A$
6. $\neg B \rightarrow \neg A$
7. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$
8. $((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$
9. B

תבניות:

טרת ההוכחות:

הערכת הוכחה פורמלית

הוכחה של A מ- Γ באמצעות S : $\Gamma \vdash_S A$

משפט S : A משפט S -אם $\phi \vdash_S A$

תכונות של יחס ייחוסות לעית

הערכת MPC

הערכת המשפטים : $\Gamma \vdash_{MPC} A$ אם $\Gamma \models A$

הקרה פרט : $\Gamma = \phi$, A משפט MPC אם A טאוטולוגיה

כיוון קט של משפט השלמות : משפט השלמות (Soundness) : אם $\Gamma \vdash_{MPC} A$

אם $\Gamma \models A$. באינדוקציה על אורך הוכחה MPC

כיוון קט של משפט השלמות : משפט השלמות

סימון שניתן לו : $\vdash_{MPC}$ במקום

נושא השיעור :

• (ראו הוכחות MPC)

• טיכונים לשפטים על הוכחות

נוכיח את : $A \rightarrow A$: הוכחה

1) $(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$

Ax2: $A \Rightarrow A$, $B \Rightarrow (A \rightarrow A)$, $C \Rightarrow A$

a) $A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$

Ax1

3) $((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$

1 & 2 MP

4) $(A \rightarrow (A \rightarrow A))$ Ax1

5) $(A \rightarrow A)$ MP

משפט של הוכחות ב-HPC

משפט אם A אזי B

הוכחה: נניח A

הוכחנו B

לכן הוכחנו $A \rightarrow B$

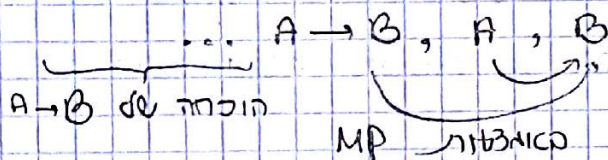
משפט (דדוקציה)

(א) הוכחה פורמלית: אם $A \vdash_{HPC} B$ אזי $\vdash_{HPC} A \rightarrow B$

(ב) הוכחה כללית: אם $\Gamma, A \vdash_{HPC} B$ אזי $\Gamma \vdash_{HPC} A \rightarrow B$

הכוון השני (כאן אקס סריוואלי):

אם $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ אזי $\Gamma, A \vdash B$ הוכחה:



(ג) הוכחה ע: יש אסטרטגיה שבהנחת הוכחה של B מ-A ו- Γ, A בונה הוכחה של $A \rightarrow B$ מ-A ו- Γ .

הוכחה של משפט הדדוקציה:

נוכיח באינדוקציה על אורך הוכחה (ב-HPC)

בסיס: הוכחה באורך 1.

ב הוכחה של B באורך 1 מ-A ו- Γ, A ולכן יש 2 אופציות:

(1) B נוסחה ב- Γ, A

(א) B הוא A

(ב) $B \in \Gamma$

(2) B אקסיומה

(3) $\vdash A \rightarrow B$

1. (א) הוכחה של 5 שורות שראוי.

1. (ב) $B \in \Gamma$. נרשום הוכחה הקלה מ-A ו- Γ :

הוכחה של $A \rightarrow B$ מ-A ו- Γ {
 1) B
 2) $B \rightarrow (A \rightarrow B)$
 3) $A \rightarrow B$
 אקסיומה 1
 1, 2, 3 - MP

דקרה 2: B אקסיומה. הוכחה:

$$\phi - \lambda \text{ הוכחה } \left\{ \begin{array}{l} 1) B \\ 2) B \rightarrow (A \rightarrow B) \\ 3) A \rightarrow B \end{array} \right.$$

מספר האינדוקציה:

הוכחתי עבור הוכחות באורך $n \geq$

(נכוח עבור $n+1$):

(נניח הוכחה של B - λ Γ, A באורך $n+1$).

$$\Gamma, A - \lambda B \text{ הוכחה של } \varphi_1, \dots, \varphi_{n+1} \equiv B$$

$$\Gamma, A - \lambda \varphi_k \text{ הוכחה של } \varphi_1, \dots, \varphi_k : k \leq n+1$$

דכו לפי הנחת האינדוקציה, עבור $k \leq n$ $\Gamma \vdash A \rightarrow \varphi_k$

$$\Gamma \vdash A \rightarrow \varphi_{n+1} \text{ f3}$$

מקרים:

- 1) $\Gamma, A - \lambda \varphi_{n+1}$
 - (א) φ_{n+1} הוא A
 - (ב) $\Gamma \vdash \varphi_{n+1}$
- 2) φ_{n+1} אקסיומה
- 3) התקפה של φ_i, φ_j - λ MP

$$\varphi_j \equiv (\varphi_i \rightarrow B)$$

$$\text{דפי הנחת האינדוקציה} \left\{ \begin{array}{l} \Gamma \vdash A \rightarrow \varphi_i \\ \Gamma \vdash A \rightarrow \varphi_j \end{array} \right.$$

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ A \rightarrow \varphi_i \end{array} \right. \leftarrow \text{הוכחה של } A \rightarrow \varphi_i$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ A \rightarrow (\varphi_i \rightarrow B) \end{array} \right. \leftarrow \text{הוכחה של } A \rightarrow \varphi_j$$

$$(A \rightarrow (\varphi_i \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow \varphi_i) \rightarrow (A \rightarrow B)) \text{ (אקסיומה 2)}$$

$$MP \quad 4) (A \rightarrow \varphi_i) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

שלב של הוכחה לפי מתקנים של משפט ב

הוכחה:

לפי מקרים: (א) נניח A

:

מסקנות ב

(ב) נניח $\neg A$

:

מסקנות ב

מסקנה: ב נכונה.

משפט:

הוכחה לפי מקרים עבור MPC :

אם $\Gamma, A \vdash_{MPC} B$ - 1 - $\Gamma, \neg A \vdash_{MPC} B$ אזי $\Gamma \vdash_{MPC} B$
 וכן, קיים אלמנטריות שבהונתן הוכחות של $\Gamma \vdash_{MPC} B$ - 2 - $\Gamma \vdash_{MPC} B$
 קונה הוכחה 3 - $\Gamma \vdash_{MPC} B$

הוכחה:

נניח $\Gamma, A \vdash B$ - 1 - $\Gamma, \neg A \vdash B$

- 1) $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ (1 : 1)
- 2) $\Gamma \vdash \neg A \rightarrow B$
- 3) $\phi \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B)$ (נוכח קודם)
- 4) Mp 3, 2 - $(A \rightarrow B) \rightarrow B$
- 5) Mp 4, 1 - B

■

האברה:

- קבוצה Γ של נוסחאות (ב- MPC) אם יש נוסחה שלא ניתנת להוכחה א- Γ

- קבוצה Γ של נוסחאות אם כל נוסחה ניתנת להוכחה א- Γ

$\Gamma \vdash A$ - $\Gamma \vdash A$ - $\text{על כן } A$ יכול להיות

$$+3''H \quad \Leftarrow$$

二、

נקח ב β : $\beta - \alpha$: הוכחה :

הוכחה של A (מתן) $\left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ A \end{array} \right.$

הוכחה של A (נתון) {

הוכחה $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

MP 108 $A \rightarrow B$

Mr. 'ad' B

איזה מסבירות של אנשים השפלות:

(1) $\rho \in \Gamma$ חזקה Γ סבירה

(1.5) אדם ח' לא ספיקה אולי ח' לא שוקקות

$\Gamma \vdash A$ ist $\Gamma \models A$ für (jeder) Götz (2)

נכוח ו- $(2) \rightarrow (1,5)$

נניח $\Gamma \models A$ ו־ $\exists \Gamma \vdash A$. נניח $\Gamma \vdash A$. נניח $\Gamma \vdash A$.

$\Gamma, A \vdash A$ פרי $\Gamma, A \vdash A$: גורם : נקודה 1.5

יחזקאל א' ה' ו' ח' ט' י' י"א י"ב י"ג י"ד י"ה י"ו י"ז י"ח י"ט י"א

: (2) $\rightarrow$ (1.5) - e נוכח

נניח $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ו $f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ אז $e \cdot f = 0$ ו $e \cdot e = 1$ ו $f \cdot f = 1$

מ. עמו ספיקה, ולכן כל נוסחה נובעת מסמל 2- מ.

A nono caso $\Gamma \vdash A$ - e dopo ② - si, $\Gamma \vdash A$ A dopo

אם כן הן צריכות להיות

הוכחה:

Γ דוקיות הקסימיות אם Γ דוקיות ולא מותרת מהם הקבוצה דוקיות אחרת.

הוכחות של הקבוצות דוקיות הקסימיות:

אם Γ דוקיות הקסימיות:

$$(1) \text{ אם } \Gamma \vdash A \text{ אזי } A \in \Gamma$$

$$(2) \text{ אם } A \in \Gamma, \text{ אז } A \in \Gamma \text{ או } A \in \Gamma$$

$$(3) (A \rightarrow B) \in \Gamma \iff A \notin \Gamma \text{ או } B \in \Gamma$$

הוכחה של (1):

אם $A \notin \Gamma$ אזי $\Gamma \cup A$ דא דוקיות (ע"י הקסימיות)

עכ"פ, אם $B \in \Gamma, \Gamma, A \vdash B$ פריט $\Gamma, A \vdash A$

עכ"פ, סרטיסיות $A \vdash A$ וכן Γ דא דוקיות (סטרומה)

■

הוכחה של (2):

נניח $A \notin \Gamma$ ונניח ש- $A \in \Gamma$ (ע"י הקסימיות)

$\Gamma \cup A$ דא דוקיות, ולכן עבור כל $B \in \Gamma, \Gamma, A \vdash B$

פריט: $\Gamma, A \vdash A, \Gamma, A \vdash A \iff \Gamma, A \vdash A$ (משפט הוכחה ע"י הקריס)

עכ"פ, $A \vdash A$ עכ"פ $A \in \Gamma$ עכ"פ (1)

■

הוכחה של (3):

$\Leftarrow$ נניח $(A \rightarrow B) \in \Gamma$ ונניח $B \notin \Gamma$ אז $A \notin \Gamma$

נניח ששליפה ש- $A \in \Gamma$ וכן, אז ש- $(A \rightarrow B) \in \Gamma$ (הקב):

$$\begin{cases} \Gamma \vdash A \\ \Gamma \vdash (A \rightarrow B) \end{cases}$$

ועכ"פ: $\Gamma \vdash B$ ועכ"פ $B \in \Gamma$ - (2) סטרומה ולכן $A \notin \Gamma$

$\Rightarrow$ נניח: $B \in \Gamma$, אז $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ (אקסיומה 1)

ועכ"פ $\Gamma \vdash (A \rightarrow B) \iff (A \rightarrow B) \in \Gamma$ - (2)

הוכחה ב: $A \notin \Gamma$ אז $A \in \Gamma$ עכ"פ (2)

$\Leftarrow$

מהוביח את העשט: אס ח' חקית אולי ח' ספיקה

כס קבוצה זיקיות מוכלת בקבוצה זיקיות מוכסיות

כל קבוצה חזקה היא סבירה.

היה $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ רשימה אינסופית של $\mathcal{A}$ הנוסחאות.

שדור הקבוצות Π_n שמכילות את Γ ובהן n זרקות.

$$\Gamma_0 = \Gamma$$

$$\Gamma_{n+1} := \begin{cases} \Gamma_n \cup \{A_{n+1}\} & \text{אם } A_{n+1} \in \Gamma_n \\ \Gamma_n \cup \{A_{n+1}\} & \text{אחרת} \end{cases}$$

הכנסת Γ_n , n ריבוע

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

$\sim \text{quasi}$ Γ quasi $n=0$ quasi

$n \rightarrow n+1$. Γ_n לוקבות . $\exists \Gamma_{n+1}$ לוקבות .

הכללה, $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup A_{n+1}$ פה (הכללה)

$\Gamma_n U A_{n+1} = \Gamma_n U A_{n+1} \cdot \rho_{n+1}$ (ב)

Γ_{n+1} פסא דוקטור וואס פסטרירט. $\beta \vdash A_{n+1}, \Gamma_n$ פס פס β , וואס

$\Gamma_n, A_{n+k} \rightarrow B$ מכאן $B \rightarrow \Gamma_n$ מכאן B ואכן Γ_n מכאן A_k דוקי קסטרורה.

הוכחה של טענה 2:

$$\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \Gamma_3 \subseteq \dots \subseteq \Gamma_i \subseteq \Gamma_{i+1} \subseteq \dots$$

$$\Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$$

כפי הנראה

אם $\Delta \vdash A$ אז דקיות אולי יש A כן ש- $\Delta \vdash A$

אם $\Delta \vdash A$ אז יש n_1 כן ש- $\Gamma_{n_1} \vdash A$ ו- n_2 כן ש-

$$\begin{cases} \Gamma_{\max(n_1, n_2)} \vdash A \\ \Gamma_{\max(n_1, n_2)} \vdash \neg A \end{cases}$$

ואכן $\Gamma_{\max(n_1, n_2)}$ דקיות בסתירה עצמה 1.

אדוקסיות נובעת גכן ש- Δ הוספתי כל נוסחא או את שלמות
אכן ברור שהוא אדוקסיות (שכן, כל הוספה של נוסחא תהפך את Δ
על דקיות)

הוכנו את טענה 1

טענה 2:

כל קבוצה דקיות אדוקסיות סבירה.

הוכחה:

צ"ל סבירה Γ שהוספת את כל הנוסחאות ב- Γ .

הנראה:

$$p_n(\Gamma) = \begin{cases} \text{true} & \text{אם } p_n \in \Gamma \\ \text{false} & p_n \notin \Gamma \end{cases}$$

טענה:

Γ מספק את Γ (כל התקדים כפי אינדוקציה חזרה ואכן נכון
טענה יותר חזקה).

טענה חזקה יותר:

$$A \in \Gamma \text{ או } p \text{ אז } \llbracket A \rrbracket_{\Gamma} = \text{True}$$

הוכחה: באינדוקציה גרמה.

בסיס: אם A גרמה אז כל התנאים כפי הנראה ש- Γ

$$\llbracket B \rrbracket_{\Gamma} = T \iff \llbracket A \rightarrow B \rrbracket_{\Gamma} = T$$

או $\llbracket A \rrbracket_{\Gamma} = f$ והנחת האינדוקציה $\llbracket B \rrbracket_{\Gamma} = T \iff B \in \Gamma$

$$A \notin \Gamma \iff \llbracket A \rrbracket_{\Gamma} = f$$

ואכן לפי תכונה 3) $(A \rightarrow B) \in \Gamma \iff$ נכרש.

דבור A :

$$A \in \Gamma \iff A \notin \Gamma \iff [A]_{\mathcal{F}_\Gamma} = F \iff [A]_{\mathcal{F}_\Gamma} = T$$

■

משפט קומפקטיות:

גרסה 1:

אם $\Gamma \models A$ אז יש תת קבוצה סופית Δ של Γ כך ש- $\Delta \models A$

גרסה 2:

אם כל תת קבוצה סופית של Γ ספיקה אז Γ ספיקה.

הוכחת גרסה 1:

אם $\Gamma \models A$ אז $\Gamma \vdash_{HPC} A$ לפי עקרון קומפקטיות של יחס

ייחוסיות יש Δ סופית, תת קבוצה של Γ כך ש:

$$\Delta \vdash_{HPC} A \text{ ולכן לפי טאוט } \Delta \models A$$

■

משפט:

אם כל תת סדר של G ניתן לצבוע חוקי

אז G ניתן לצבוע חוקי. G ניתן לצבוע חוקי. G ניתן לצבוע חוקי.

רעיון הוכחה:

(רעיון צבועה לפי בעזרת נוסחאות.