

2/4/2017

#3 הרצאה

בשיעור שעבר למדנו אינטואיציה סימנטית בסיסית:

- מה אלו נוסחה ϕ בסבוקה $\mathcal{L}$. סימון: $\phi \in \mathcal{L}$

(1) נוסחה סבוקה בסבוקה $\mathcal{L}$

(2) נוסחה סבוקה

(3) נוסחה טאוטולוגיה

(4) נוסחה סתירה

(5) נוסחאות שקולות

(6) קבוצת נוסחאות סבוקה

(7) נקודת סימנטיות: נוסחה ϕ (נובעת סימנטית) מקבוצת נוסחאות Γ אם ϕ

סבוקה שמסבוקת Γ גם מסבוקת ϕ .

סימון: $\Gamma \models \phi$. מקרה פרטי $\phi \models \psi$, אפ"ם ϕ טאוטולוגיה.

אפיונות:

: Evaluation Problem

קלט: נוסחה ϕ וסדרה ארוכה של משתנים $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

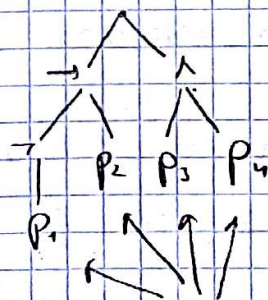
$\{T, F\} \rightarrow \text{Var}_\alpha$ (כל משתנה α מקבל ערך T או F)

פלט: אלו של ϕ הם סבוקה של משתנים $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ נותנת אותם לראש α

משפט:

יש אלגוריתם (פולינומי) לבדיקת Evaluation.

(PT)



סדרת אינטואיציה קאמפוזיציה α

אפאריטת עישוב ספיקות

נאמר על המפצות (הסופות) השונות של α ונרץ את האפאריטת שטאר
עליו. סה"כ כאן רוצה אפאריטת דטרמיניסט: $O(n^2)$
אם ניתן ענחש את הנסחה המספקת - אפאריטת אדטרמיניסט - כאן הרוצה
הוא $O(n)$.

משפט

יש אפאריטת שקודק האם φ נוסדת מקדוד (סופות) Π .

דוגמה

$\varphi \models \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ אם $\varphi \rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3)$ סאוסולוציה.

מטרת אדמנך

- 1) תחשוב הוכחת דודר עובדת פאוקוס.
 - 2) האם יש עט "מפוק" קשרים עדימ?
- נכח:

סימטריקה של נוסחה φ : עכס נוסחה נאמך פועקזה מספיקות $\{T, F\}$.
האם עכס פועקזה f מספיקות $\{T, F\}$ יש נוסחה φ ש- f "מכדוד"
($f(\varphi) = \{ \varphi \}$) עכס מספיק f .

דוגמה

- $f(\varphi) = T$ עכס φ . נותנת עדיטו- על ידו כל סאוסולוציה (φ, ρ) .
- $f(\varphi) = T$ אם φ אס'לוצ - $f(\varphi) = F$ אם זאילוצ
 $f(\varphi) = \begin{cases} T & \text{אם ז'לוצ} \\ F & \text{אם זאילוצ} \end{cases}$

φ נוסחה. עכו יש מספר סופי של משתנים שמופיעים ב- φ ($\text{Var } \varphi$ קב' סופית)
 $\varphi_1, \varphi_2 = \{ \varphi \}$ דודר כל φ_1, φ_2 שמתעבדים על $\text{Var } \varphi$. ע- f אין
תכונה זאת.

הערה

קדודת משתנים Δ נקראת תמיכה של $\{T, F\} \rightarrow$ מספיקות f
אם דודר כל מספיקות φ_1, φ_2 שמתעבדים על Δ $f(\varphi_1) = f(\varphi_2)$

הערה

ע- f יש תמיכה סופית אם יש Δ סופית שהיא תמיכה של f .

משפט 1:

כל פונקציה שמעבירה כל יציאה נוסחה יש תמיד סופית

שאלה:

האם יש הספיק קשרים כדי לבטא פונקציות עם תמיד סופית?

א:

האם כל f עם תמיד סופית קיים φ כך שכל f :

$$f(\varphi) = \varphi$$

משפט 1:

כל פונקציה f עם תמיד סופית יש נוסחה φ כך ש- $f = \varphi$

הוכחה:

קבוצת קשרים Σ נקראת שלמה פונקציונלית אם כל פונקציה עם תמיד

סופית ניתן לבטא כל יציאה נוסחה שמכילה רק קשרים Σ

משפט 2:

$\{ \neg, \vee, \wedge \}$ שלמה פונקציונלית.

ברור ש- משפט 2 $\Leftrightarrow$ משפט 1

הוכחת משפט 2:

כל פונקציה עם תמיד סופית Δ "נתיים" סלמה:

משתנים Δ - φ				ערך של f
T	T	T	T	T
T	F	T	T	

$\Delta = \{p_1, p_2\}$		f (לדבר קטנה)
p_1	p_2	f (לדבר קטנה)
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

טבלה:

טבלת טרופים יש נוסחה שמסבירה אותה פונקציה וטבלה:

טבלת טרופים לרכיב סופר $p_1, \dots, p_n$ $\beta \in \{T, F\}$ יש נוסחה עם משתנים $p_1, \dots, p_n$ כן ש- T F β $f(p_i) = \beta$ $\forall i$.

צורה:

$$TFFT \leftrightarrow p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4$$

טבלת שורה שנותנת את הטבלה את נקודה נוסחה ψ כל ψ וטבלה
נלשה דיסיונציה על כל ψ ה- ψ ה- ψ .

קצרים הוכחנו משפט יותר חזק המשפט 2. הוכחנו שכל f עם תחומי סופר

$\bigvee \bigwedge$ (אטומים או משתנים)

יש נוסחה מהצורה

טבלה או קוראוס Disjunctive Normal Form

מסקנה:

כל נוסחה שקולה לטבלה DNF -

הצורה:

(1) אטום - משתנה או משתנה

(2) דיסיונציה של אטומים (קור)

(3) קונקציה של אטומים (קור).

נוסחה DNF - Disjunctive Normal Form אם היא דיסיונציה של

קונקציות של אטומים.

נוסחה CNF - Conjunctive Normal Form אם היא קונקציה

של דיסיונציות של

משפט:

כל נוסחה שקולה לטבלה DNF (הוכחנו בדקנו)

משפט:

כל נוסחה שקולה לטבלה CNF -

נהג ψ , ψ שקולה ל- DNF (אוסף) $\vee$ וזכו ψ שקולה

ס - (אוסף) $\wedge$ $CNF \rightarrow$ (אוסף) $\vee$

השפט:

יש אלגוריתם שכלל, נוסחה בונה DNF שקולה.

האם $\{ \neg, \wedge \}$ שלמה פונקציונלית? כן!

כי $\neg, \vee, \wedge$ שקול ל- $(\neg, \wedge)$

- כדי להוכיח ש- $\{ \neg, \wedge \}$ אינה שלמה פונקציונלית צריך להראות דוגמה

פונקציה עם תוצאה סופית שלא ניתן לבטא באמצעות נוסחה.

דוגמה:

$\{ \neg, \wedge \}$ אינה שלמה פונקציונלית. (לא ניתן לבטא את $\neg p_1$ בעזרת

פונקציות ודיסיונקציה).

- אם $\{ \neg, \wedge \}$ שלמה פונקציונלית. אם $\{ \neg, \rightarrow \}$ שלמה פונקציונלית.

הערה:

החלטה חשובה שהוספנו - "יש רק שני ערכי אמת" - True, False.

למה קוראים לטבלת האמת.

דוגמאות למקומות שהם יש יותר מ-2 ערכי אמת: אינטליגנציה ואכזריות.

שפות תכנות.

טערת ההוכחות

பித்திர பித்திர

הצעה:

מחברת הוכחה פורמלית: אורכת N:

- 1) אלפאבית
- 2) נוסטאות - עטק יאחרות קוטא נוסטאות
- 3) אוקסיותות - עטק גתוסטאות נקטאות אוקסיותות
- 4) כלסו הוסק - כל כלל הוסק כל יחס כל נוסטאות. כלסו ינור יתת אקוטא.

$$R \frac{a}{b} \quad R(a, b) \quad R \frac{a_1, a_2}{b} \quad R(a_1, a_2, b)$$

הצדקה:

הוכחה של ניסוח A מקובלת ניסוחות Γ באמצעות הוכחה S כי:

סדרת ניסוחות $A_1, A_2, \dots, A_n$ כן ש:

$$A_n \equiv A \quad (1)$$

: פירמע פארמאט צוויי i דער (2

(S de) isotropic A; (ic

7. (ב) A_1 הקטן

∴ $\rho \leq j, k \leq i \Rightarrow$ አባላት ጠቅላላ የሆኑ ናቸው (ረ)

$$R \quad \frac{A_i, A_k}{A_i}$$

$\Gamma \vdash A$: ייש היבחה של A ב- Γ $S \vdash$: ייש

5 de יובלות on H_s

፡ ፬፮፻፳፱

A המשפט (של S) μ_A ניתנת עדוּכחה מקבוצה ריקה.

1. 7. 2023

- 1) אמצע בית $\{0,1\}$
- 2) נוסחאות - כל החריפות
- 3) אקסיומה $\{1\}$
- 4) כלכלה היסק

$$R \frac{a}{10a} \quad , \quad R \frac{a, b}{ab}$$

האם 11 המשפט? ק: ציטטה מסדרה שאיננה נכונה:

1, 1, 11 או 1, 11
 $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 נכונות, נכונות, נכונות

האם 11 נותנת עזרה בהוכחה? ק: {0, 1, 100, 1000, ...}

1000, 100, 1, 00
 $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 עשרת אלפים, אלף, מאתיים, עשר

משפט: (תכונות של יחס ויכחות)

(א) הומומורפיות:

אם $\Gamma \vdash_s A$ ו- $\Delta \geq \Gamma$ אזי $\Delta \vdash_s A$

הוכחת הומומורפיות:

אם $A_1, \dots, A_n$ הוכחה של A ו- Γ אזי $A_1, \dots, A_n$ הוכחה של A ו- Δ

(ב) סרטיסיות: אם $\Gamma \vdash_s B$ ו- $\Gamma \cup \{B\} \vdash_s A$ אזי $\Gamma \vdash_s A$

הוכחה:

אם $A_1, \dots, A_n$ הוכחה של B ו- Γ אזי $A'_1, \dots, A'_m$

הוכחה של A ו- $\Gamma \cup \{B\}$ אזי $A_1, \dots, A_n, A'_1, \dots, A'_m$ הוכחה של A ו- Γ

(ג) סרטיסיות כללית:

אם $\Gamma \vdash_s B$ אז $B \in \Delta$ ו- $\Gamma \cup \Delta \vdash_s A$

אזי $\Gamma \vdash_s A$

(ההוכחה דומה להוכחת הסרטיסיות)

(ד) קומפקטיות:

אם $\Gamma \vdash_s A$ אזי קיימת תת קבוצה סופית $\Delta \subseteq \Gamma$ כך ש-

$\Delta \vdash_s A$

הוכחה:

אם $A_1, \dots, A_n$ הוכחה של A ו- Γ אזי בסדרה אינסופית

של נוסחאות Γ נוסחאות אלו Δ וקבל $\Delta \vdash_s A$

תחשיב הילברט לתורת הפסוקים

HPC: Hilbert Propositional Calculus

- (1) אופק בית: השתנים $p_1, \dots, p_n, \dots$, השבטים $\rightarrow, \neg$, סימני $(,)$.
- (2) נוסחאות: נוסחאות של תורת הפסוקים עם השבטים $\rightarrow, \neg$.
- (3) אקסיומות (קהלשן)
- (4) כללי הוסק (קהלשן)

השפט: (השלמות)

$$\Gamma \models A \quad \Gamma \vdash_{HPC} A \quad \text{אם}$$

יתרונות ב-HPC - תחשיב "הסן" והוכחה קצרה של השפט השלמות.
חסרונות - קשה למצוא הוכחות ב-HPC.

אקסיומות של HPC:

$$\begin{aligned} Ax1 & (A \rightarrow (B \rightarrow A)) \\ Ax2 & ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))) \\ Ax3 & ((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)) \end{aligned}$$

כללי הוסק: MP :

$$\frac{A, A \rightarrow B}{B}$$

השפט: (אורחות - Soundness)

$$\Gamma \models A \quad \text{אם} \quad \Gamma \vdash_{HPC} A \quad \text{אם}$$

הוכחה: (באמצעות דיווח על אורך הוכחה ב-HPC).

סיים: הוכחות באורך $\leq$ אם A הוכחה Γ -אורך $\leq$ אם

(א) A אקסיומה
 (ב) $A \in \Gamma$

לדעת סלר: $Ax1, Ax2, Ax3$ אקסיומותיות. ולכן אם אנו בקרה

(א) סימני בקרה (ב) כל עבודה שהספקת כל נוסחה ב- Γ בקרה

הספקת עם את A (כ) $A \in \Gamma$

דבר 1: $n \rightarrow n+1$

(ניח) $A_1, \dots, A_{n+1}$ הוכחה Π -א. אזי יש כמה מקרים:

(1) A_{n+1} אקסיומה

(2) A_{n+1} ק- Π

(3) A_{n+1} מתקבלת לפי MP ממשפטים A_i, A_j שקדמו לה.

מטרה:

ל- A_i ו- A_j יש הוכחה באורך קטן או שווה ל- n לפי: $\Gamma \vdash A_i, \Gamma \vdash A_j$

במקרה לפי $A_i \equiv (A_j \rightarrow A_{n+1})$. ניקח בדיקה של המשפטים את Π .

לפי הנחת אינדוקציה של המשפט את A_i ו- A_j לפי חוקי

משפט A_{n+1} את

הערה:

הקסיומות חייבות להיות סאנסונסיות בשביל המשפטים ותקיים $\phi \vdash A$.