

תחביר הפסוקים:

תחביר (סינטיקס)

לכתיב אותה (סמנטיקה)

מסדרת הוכחה Hilbert Propositional Calculus (HPC)

הערכה: מדוע "לפי" שמדובר בהיבט, סינטיקס לא מרי, של הנוסחאות

מהי טענה חכמה?

* אקסיומות: "אמתות" בסיסיות

* כללי היסק.

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$$

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$$

$$\frac{\alpha}{\alpha \wedge \beta} \quad (\wedge I) \quad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta} \quad (\wedge E)$$

(Deduce -n)

Deduce (n)

הנחה חכמה: α אקסיומה
F כללי היסק

$$= \bigwedge \Gamma, \alpha, F$$

הוכחה: α מילת הנחה: Γ סדרת ציוד α - Γ - $\bigwedge \Gamma, \alpha, F$

סימון: אם ניתן להוכיח α מ- Γ בלעדית Γ, α סינטיקס

(שונה לחלוטין מ- $\Gamma \vdash \alpha$)
סימון

צמצום למטה הוכחה "דא אובדן"

* אקסיומה: $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
* אינן כללי היסק.

אנו נרצה שהאקסיומה יחיו קבוצה קטנה של "הנחות" שקל להפיק את

הפסוק ניתן לשינוי אחרון.

כיצד מסד כללי היסק.

HPC: הפסוקים הקשים $\neg, \rightarrow$

אקסיומות: $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

$$(A1) \quad \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$$

$$(A2) \quad (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$$

$$(A3) \quad (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \equiv (\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma)$$

$$(A3) (\neg \alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$$

Modus Ponens (MP)

כלי הוכחה:

$$\frac{\alpha \quad \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

. Γ מוכח HPC יחס α : $\Gamma \vdash \alpha$
HPC

. $\Gamma \vdash \alpha$ אם β שגוי, HPC, $\neg \beta$ נכח

תכונות בסיסיות:

① מגווןיות אם $\Gamma \vdash \alpha$, $\Delta \subseteq \Gamma$ אז $\Delta \vdash \alpha$

② הוספה אם $\Gamma \vdash \alpha$ אז $\Gamma, \Delta \vdash \alpha$

כך ע - $\Delta \vdash \alpha$

③ סגורות אם $\Gamma \vdash \alpha$ אז $\Gamma \vdash \neg \alpha$ אז $\Gamma \vdash \bot$

אם $\Gamma \vdash \alpha$

[הוכחה: כי אפשר לבנות Γ ו- α יחדיו ויש להם תוכחה α]

Γ מוכח

δ_1

Γ מוכח

δ_2

$\vdots$

$\vdots$

δ_n

סגורת תוכחה α

$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$

סגורת תוכחה: $\Gamma \vdash \alpha$ אם $\Gamma \vdash \alpha$ אז $\Gamma \vdash \alpha$

① $\Gamma \vdash \alpha$

② אם $\Gamma \vdash \alpha$ אז $\Gamma \vdash \neg \alpha$ אז $\Gamma \vdash \bot$

$\Gamma \vdash \alpha$ מוכח כי $\Gamma \vdash \alpha$ אז $\Gamma \vdash \alpha$

למשל: $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \alpha$

$(\emptyset \vdash \alpha)$

וכך מוכח תוכחה $\alpha \rightarrow \alpha$ על ידי $\Gamma \vdash \alpha$

$$\textcircled{1} \quad \frac{\alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)}{((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)} \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))$$

[הוכחה (A2) מוכח]

$$\textcircled{2} \quad \frac{\frac{\alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)}{A} \quad \frac{B}{C}}{B} \quad (A1)$$

$$\textcircled{3} \quad (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \quad \left(\begin{array}{c} MP \\ 2-1, 1 \text{ se} \end{array} \right)$$

$$\textcircled{4} \quad \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \quad (A1)$$

$$\textcircled{5} \quad \alpha \rightarrow \alpha \quad MP(3,4)$$

מכאן: (הוכחה)

$$\models \alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow \{\alpha\} \models \beta$$

($\vdash_{HPC}$ זה שילוב של $\vdash$ ו- $\models$) מכאן $\vdash \alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow \{\alpha\} \vdash \beta$

$$\vdash_{HPC} \alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow \{\alpha\} \vdash_{HPC} \beta$$

$$\{\alpha\} \vdash_{HPC} \alpha \quad \text{על "מכאן"} \quad \vdash_{HPC} \alpha \rightarrow \alpha \quad \text{הוכחה פנימית}$$

אם נכון: (הוכחה) $\vdash \alpha$

$$\left(\frac{\vdash_{HPC} \alpha \rightarrow \beta \quad \vdash_{HPC} \alpha}{\vdash_{HPC} \beta} \right) \quad \{\alpha\} \vdash_{HPC} \alpha \rightarrow \beta \quad (HPC) \quad \vdash_{HPC} \alpha \rightarrow \beta$$

הוכחה:

$$\textcircled{1} \quad \neg \alpha \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg \alpha) \quad (A1)$$

$$\textcircled{2} \quad \neg \alpha \quad (\text{הנחה})$$

$$\textcircled{3} \quad \neg \beta \rightarrow \neg \alpha \quad MP(1,2)$$

$$\textcircled{4} \quad (\neg \beta \rightarrow \neg \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \quad (A3)$$

$$\textcircled{5} \quad \alpha \rightarrow \beta \quad MP(3,4)$$

$$\alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \quad \text{על "מכאן"} \quad \text{הוכחה פנימית} \quad \text{#}$$

מכאן: $\vdash \alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow \{\alpha\} \vdash \beta$ הוכחה פנימית

$$\Gamma \vdash_{HPC} \alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{HPC} \beta$$

מכאן: $\vdash \neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ על $\{\neg \alpha\} \vdash \alpha \rightarrow \beta$ הוכחה פנימית

#

הוכחת $\vdash$ מכלול $\Rightarrow$:

$$\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta \quad \text{נניח } \Rightarrow$$

$$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta \quad \text{לכונן } \Leftarrow$$

$$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta \quad \text{לכונן } \Leftarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{הוכחה } \delta \text{ (נניח)} \\ \Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta \quad \delta \\ \Gamma \vdash \alpha \quad \text{הוכחה } \delta \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \quad \text{MP } (1,2) \quad \beta$$

$$\Leftarrow \text{ באינדוקציה על מספר ההוכחה ב- HPC } \delta \text{ מוכח } \Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$$

$$\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta \quad \text{הנניח}$$

$$\text{בסיס: } \Gamma \vdash \beta \quad \text{אקסיומה}$$

$$\textcircled{1} \quad \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \quad (A1)$$

$$\textcircled{2} \quad \text{אקסיומה } \beta$$

$$\textcircled{3} \quad \alpha \rightarrow \beta \quad \text{MP}(1,2)$$

$$\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta \quad \text{הוכחה } \delta \text{ מוכח}$$

$$\beta \in \Gamma \quad \text{במקרה } \beta \neq \alpha, \quad \text{II} \quad \beta \text{ הוכחה}$$

$$\text{אם } \beta \in \Gamma \text{ הוכחה } \delta \text{ מוכח } \Gamma \vdash \beta \text{ (בסיס)}$$

$$\text{III} \quad \beta = \alpha \quad \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \alpha$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{כאן } \delta \text{ הוכחה} \\ \text{לפי } \delta \text{ מוכח } \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \alpha \\ \text{קלוקל } \delta \text{ (נניח)} \\ \delta = \Delta \text{ } \end{array} \right)$$

$$\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \alpha \quad \text{אנונימלית}$$

$$\text{נניח } \delta \text{ מוכח } \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \delta$$

$$\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \delta \quad \text{אם } \delta \text{ מוכח } \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \delta$$

$$\text{III} \quad \text{אם } \delta \text{ מוכח } \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \delta \text{ מוכח } \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \delta$$

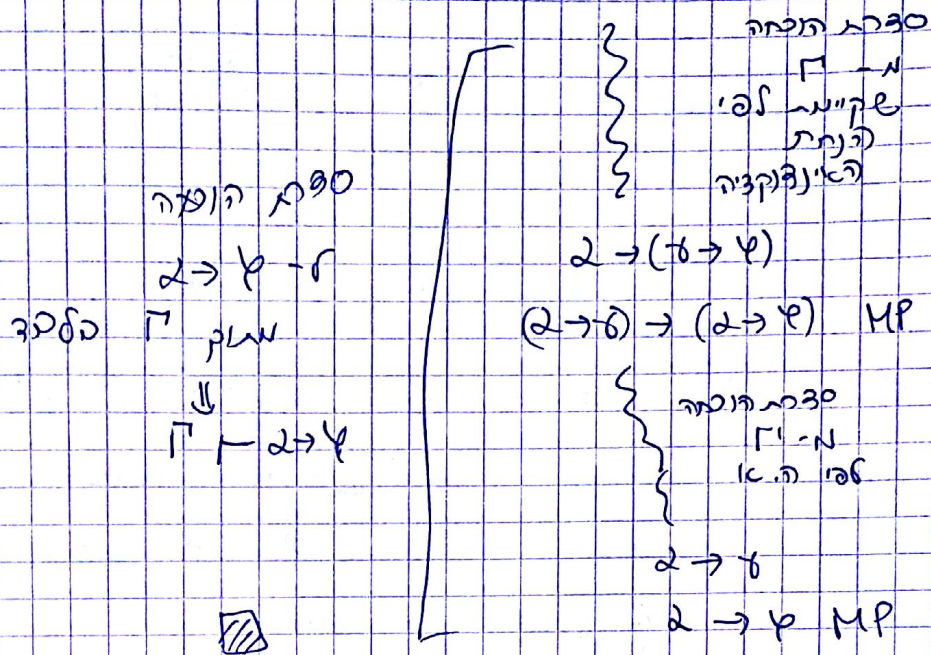
$$\text{הנניח } \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \delta \text{ מוכח } \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \delta$$

$$\text{אם } \delta \text{ מוכח } \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \delta \text{ מוכח } \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \delta$$

$$\text{בסיס, I- } \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \delta \text{ מוכח } \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \delta$$



$$(Q \rightarrow (P \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((Q \rightarrow P) \rightarrow (Q \rightarrow \varphi)) \quad (A2)$$



כנסת הנחתה!

$\{ \alpha \} \vdash \alpha \rightarrow \beta$ $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \alpha$

נניח נניח

$\{ \alpha \} \vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \rightarrow \beta$ $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

הנחה⁺

$\Delta - 1$	α, β, γ	Gr	<u>256C</u>
$(\neg \rightarrow)$			
	$\Delta \vdash \alpha \rightarrow \beta$	pk	
$(\rightarrow \rightarrow)$	$\Delta \vdash \beta \rightarrow \gamma$	nd	$(\rightarrow)$
	$\Delta \vdash \alpha \rightarrow \gamma$	sc	

תוכנית: 8' משך הצגות 3' מוסק נחלת ל $\Delta \cup \{2\} \vdash \beta$
 ובעזרת $\Delta \vdash \alpha \rightarrow \beta$ $\Delta \cup \{2\} \vdash \beta$
 סדרת הנחות בקו ל מתקן $\Delta \cup \{2\}$

ΔU_{eff}

$$\Delta O \{ 2 \} \sim \gamma$$

വിദ്യാഭ്യാസ കമ്മിറ്റി

$$\Delta \vdash 2 \rightarrow 8$$

ΔUF23
 $\beta - \delta$
 γ

β

①

סדרת האמה

$$\beta \rightarrow \gamma \quad -\delta \quad \Delta - N$$

230 pt 1012

פונקציה

 $\Delta U \{2\}$
$$\beta \rightarrow \gamma$$

②

$$\gamma \quad MP \quad (q, e)$$
$$H^1(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

∴ $\frac{1}{2} \times 10 = 5$

[illegible]
$$\{7, 2\} \cap 2$$

1. $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \neg B)$ $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B) - (\#)$

④

$A = 72$ $B = 772$

$$72 \quad B = 772$$

סבת הוכחה בלי
הנחות

$$172 \rightarrow (72 \rightarrow 7772)$$

772

תורה

$$^7_2 \rightarrow 777_2 \quad \text{MP}$$
$$({}^7\text{L} \rightarrow {}^{777}\text{L}) \rightarrow ({}^{77}\text{L} \rightarrow \text{L}) \quad (A3)$$
$$^{17}2 \rightarrow 2 \text{ MP}$$

2		MP
---	--	----

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow {}^{77}2$$
$$\therefore 1 \in A \in B$$
$$A = 72$$

אברהם

$$\vdash \neg\neg A \rightarrow A$$

3

$$777_2 \rightarrow 7_2$$
$$(777 \ 2 \rightarrow 7 \ 2) \rightarrow (2 \rightarrow 777 \ 2) \quad (A3)$$
$$2 \rightarrow {}^{77}_{2} \text{Li} \quad (\text{MP})$$

שאלה 3 (הוכחה סגורה):

Γ, α, β נכונ

$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ נכונ

$\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta$

$\Gamma \vdash \beta$ נכונ

הוכחה סגורה: נראה ש-

$\vdash_{HPC} (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta)$

נניח $\Gamma \vdash (\alpha \rightarrow \beta)$ נכונ

$\Gamma \vdash (\neg\alpha \rightarrow \beta)$ נכונ $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$

$\Gamma \vdash (\neg\alpha \rightarrow \beta)$ נכונ $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta$

הוכחה נכונה

① $\alpha \rightarrow \beta$

הוכחה נכונה

② $\neg\alpha \rightarrow \beta$

הוכחה נכונה

③ $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta)$

④ β נכונ β נכונ β נכונ β נכונ

$\left[\begin{array}{l} MP(1,3) \text{ או } MP \\ MP(4,2) \text{ או } SI \end{array} \right]$

הוכחה סגורה: $\vdash_{HPC}$

$\Gamma \vdash \alpha$ נכונ

$\Gamma \vdash \alpha$ נכונ

$\Gamma \vdash \alpha$ נכונ

נכונ

$\Gamma \vdash \alpha$ נכונ

הוכחה

הוכחה סגורה: $\vdash_{HPC}$ הוכחה סגורה: $\vdash_{HPC}$

$\Gamma \vdash \alpha$

הוכחה סגורה: $\vdash_{HPC}$ הוכחה סגורה: $\vdash_{HPC}$

הוכחה סגורה: $\vdash_{HPC}$ הוכחה סגורה: $\vdash_{HPC}$

$\Gamma \vdash \alpha$

הערה: קטגוריה Γ קריאה α קיים בסדר 2

כך ש- $\Gamma \vdash_{HPC} \alpha$

(אם יהיה צריך להשתמש אולי במשפט הזה)

הערה: הקטגוריה $\Gamma = WFF_{\{ \neg, \rightarrow \}}$ אינה קריאה

נניח $\Gamma = \{ p_0, \neg p_0 \}$

אם $\Gamma \vdash \alpha$ אז $\Gamma \vdash \neg \alpha$ $\Leftrightarrow$ $\Gamma \vdash \neg \neg \alpha$

קריאה: $\Gamma \vdash \alpha \Leftrightarrow \Gamma \vdash \neg \neg \alpha$

אם $\Gamma \vdash \alpha$ אז $\Gamma \vdash \neg \neg \alpha$ ובסדר 2

$\Gamma \vdash \neg p_0$

$\Gamma \vdash \neg \neg \alpha \Leftrightarrow \Gamma \vdash \alpha$

קריאה בסדר 2 $\Gamma \vdash \alpha$ $\Leftrightarrow$ $\Gamma \vdash \neg \neg \alpha$ $\Leftrightarrow$ $\Gamma \vdash \neg \neg \neg \neg \alpha$ $\Leftrightarrow$ $\Gamma \vdash \neg \neg \alpha$ $\Leftrightarrow$ $\Gamma \vdash \alpha$

$\vdash \neg \neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

$\vdash \neg \neg \alpha$

MP x2 (במשפט MP)

הערה: אם יהיה צורך במשפט הזה

המשפט הזה הוא $\alpha \rightarrow \neg \neg \alpha$ - כי לא קורה בקטגוריה הקריאה

המשפט הזה (2) משפט הקריאה

אם $\Gamma \vdash \alpha$ אז $\Gamma \vdash \neg \neg \alpha$

לחידוש Γ הקטגוריה הקריאה

אין שינוי שם הכאן