2.11 **תרגול 1 לוגיקה למדעי המחשב**

בן לי ואן
benleevdk@post.tau.ac.il
אחרי קורס נוסף
שעות קבלה: יום ג', 14:00

אינדוקציה

תהי U קבוצה ("עולם"), ו- $B \subseteq U$ תת קבוצה

ו- F קבוצה של פונקציות כך שלכל $f \in F$ היא פונקציה $f: U^n \to U$

$$F \subseteq \bigcup_{n \geq 1} \{g \mid g: U^n \to U\}$$

הגדרה: $X_{B,F} \subseteq U$ היא הקבוצה שמקיימת:

1. $B \subseteq X_{B,F}$

2. $X_{B,F}$ סגורה תחת F: לכל $f \in F$ ולכל $x_1, \dots, x_n \in X_{B,F}$, $f(x_1, \dots, x_n) \in X_{B,F}$

3. $X_{B,F}$ מינימלית ביחס להכלה ב-(1) ו-(2).

כלומר: אם $T \subseteq U$ מקיימת את (1) ו- (2) אז $X_{B,F} \subseteq T$

משפט: $X_{B,F}$ קיימת ויחידה. [הוכחת יחידות: הכלה דו כיוונית, הוכחת קיימות: הגדרה. מסעיף (3) (נראה מיד)]

דוגמה: $U = \mathbb{R}$ $B = \{0\}$ $F = \{f\}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f(x) = x+1$

איזה איברים יש ב- $X_{B,F}$?

$0 \in X_{B,F}$ (איבר בסיס) $1 \in X_{B,F}$ וכן $2 \in X_{B,F}$ ....

שאלה: איך מוכיחים שאיבר $u \in U$ שייך ל- $X_{B,F}$?

הגדרה: סדרת יצירה של איבר $u \in U$ מעל B, F היא סדרה סופית של איברים $a_1, \dots, a_k$ כך ש:

1. $a_k = u$

2. לכל $1 \leq i \leq k$, a_i מקיים לפחות אחד מהתנאים הבאים:

(i) $a_i \in B$

(ii) a_i מתקבל ע"י הפעלה של פונקציה $f \in F$ על איברים קודמים בסדרה.

משפט: $u\in X_{B,F} \iff$ יש ל-u סדרת יצירה מעל B,F.

בהמשך לדוגמה: סדרת יצירה של 2:

1. 0 $(0\in B)$
2. 1 $(1=f(0))$
3. 2 $(2=f(1))$

הערות: 1. סדרת יצירה היא סדרה סופית.

2. לאיבר $u\in U$ יכולות להיות כמה סדרות יצירה שונות.

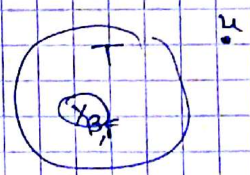
3. מהגדרה נובע שהאיבר הראשון בסדרה חייב להיות שייך ל-B.

שאלה: איך מוכיחים ש- $u\in U$ <u>אינו שייך</u> ל- $X_{B,F}$?

(**) **תשובה:** מוצא קבוצה "פשוטה" T כך ש- $u\notin T$ ו- $X_{B,F}\subseteq T$!

$X_{B,F}\subseteq T$

[סדרות נוכיח באינדוקציה]



משפט: יהי $T\subseteq U$ קבוצה כך ש: (משפט ההוכחה באינדוקציה)

- (בסיס): $B\subseteq T$
- (צעד) T סגורה ל-F: לכל $f\in F$ ולכל $t_1,\dots,t_n\in T$
  $f(t_1,\dots,t_n)\in T$

אזי $X_{B,F}\subseteq T$

דוגמה: $U=\{a,b\}^*$ [קבוצת המילים מעל א"ב a,b]

$B=\{aa\}$

$F=\{f\}$ כאשר $f:U\to U$ מוגדרת באופן הבא:

$$f(w)=\begin{cases} aawb & \text{w מתחילה ב-a} \\ bbwa & \text{אחרת} \end{cases}$$

(w = word במקרה הזה)

א. הוכיחו/הפריכו: $bba\in X_{B,F}$

הטענה לא נכונה (נפריך)

$T=\{w\in\{a,b\}^* \mid w \text{ מתחילה ב-} a\}$

$bba\notin T$. נוכיח באינדוקציה ש- $X_{B,F}\subseteq T$

<u>בסיס:</u> $B=\{aa\}\subseteq T$

<u>צעד:</u> יהי $w\in T$. רוצים להראות: $f(w)\in T$

כיוון ש- w מתחילה ב-a אז $f(w)=aawb$ ולכן

Scanned by CamScanner

$f(w)$ מתחילה ב-a, כלומר $f(w)\in T$. ∎ (**-מ סיימנו)

ב) הוכיחו/הפריכו: $aabb \in X_{B,F}$

[$T=$ מילים שאינן באורך 4 עם פה אם]

הטענה לא נכונה.

נסמן $\#_a(w)$ - מס' ה-a-ים ב-w (באופן דומה $\#_b(w)$)

נגדיר: $T=\{w\in U \mid \#_a(w)>\#_b(w)\}$

עבור תכונה $aabb\notin T$ ✓ !-ו $X_{B,F}\subseteq T$ (**)

נוכיח $X_{B,F}\subseteq T$ באינדוקציה.

1. בסיס $B=\{aa\}\subseteq T$ ✓

2. צעד: יהי $w\in T$ (*) אם w מתחילה ב-a:

$f(w)=aawb\in T$ וזה שומר על $\#_a(w)>\#_b(w)$ ✓

(*) אחרת:

$f(w)=bbwa$ וזה בעיה! כי T לא סגורה ל-F

(הוכחנו ב-(א) שכל המילים ב-$X_{B,F}$ מתחילות ב-a ולכן המקרה אחר לא קורה)

הפתרון הבעייתי: לחזק את הנחת האינדוקציה

$$T'=\{w \mid \#_a(w)>\#_b(w) \text{ וגם } w \text{ מתחילה ב-} a\}$$

$aabb\notin T'$ ✓ !-ו $X_{B,F}\subseteq T'$

נוכיח באינדוקציה ש- $X_{B,F}\subseteq T'$

בסיס: $B=\{aa\}\in T'$ (כי aa מתחילה ב-a !-ו $\#_a(aa)=2>0=\#_b(w)$)

צעד: $w\in T'$. בפרט, w מתחילה ב-a. לכן $f(w)=aawb$:

$$\#_a(f(w))=2+\#_a(w)>1+\#_a(w)\underset{w\in T'}{\geq}\#_b(w)+1=\#_b(f(w))$$

ולבסוף $f(w)$ מתחילה ב-a ולכן מהגדרת T' נובע ש- $f(w)\in T'$. ∎

הערה: הטענה ש- $T\supseteq X_{B,F}$ היא אכן נכונה, אבל נכשלנו כשהוכחנו אותה באינדוקציה כיוון ש-T לא סגורה ל- $f\in F$.. ולכן רצינו להוכיח ש- $X_{B,F}\subseteq T'$: