

בניית פונקציה

הצגת הנתונים

$$\Sigma = (C_0, \dots, f_0, f_1, \dots, f_n, R_1, \dots)$$

Σ הוא סדרת הנתונים

x_i : נתון

Σ : סדרת הנתונים

$R_i(t_1, \dots, t_n)$: פונקציה

R_i : פונקציה

$t_1, \dots, t_n$: נתונים

$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$: קשרים

$\forall x \varphi, \exists x \varphi$: כמותים

קשרים

① כללים קשרים

② קשרים, כלל קשרים

$$(\forall x R(x)) \wedge R(y) : \text{פס}$$

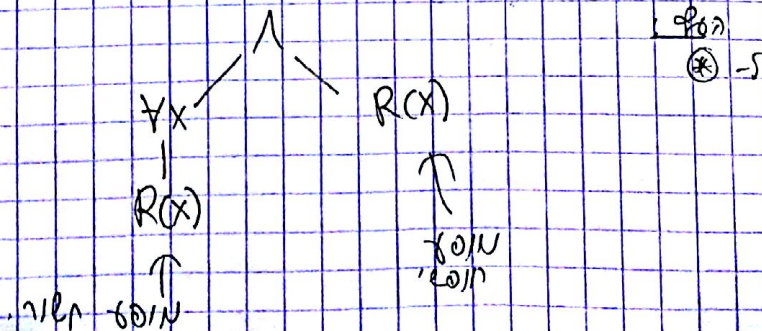
קשרים

$$\forall x (R(x) \wedge R(x))$$

קשרים, קשרים, קשרים

$$(*) (\forall x R(x)) \wedge R(x) : \text{פס}$$

קשרים, קשרים, קשרים
קשרים, קשרים, קשרים
קשרים, קשרים, קשרים



הצגת פונקציה

$$\varphi = R(z_1, \dots, z_n) \quad : \text{פונקציה}$$

FREE
VARIABLES

$FV(\varphi) =$ משתנים חופשיים בפונקציה

$$FV(\alpha \cup \beta) = FV(\alpha) \cup FV(\beta) \quad : \text{האיחוד}$$

$(\forall x, \exists x)$ משתנים קשורים

$$FV(\neg \alpha) = FV(\alpha)$$

$$FV(\bigwedge_{x \in A} \alpha) = FV(\alpha) \setminus \{x\}$$

אם x מופיע ב α ו $x \notin FV(\varphi)$ אז x קשור ב φ

משפט החליפה:

אם α פונקציה ב x ו β פונקציה ב y ו φ פונקציה ב x, y אז φ פונקציה ב x, y

$$\overline{\varphi}_1(\alpha) = \overline{\varphi}_2(\alpha)$$

המשפט של החליפה:

$$\forall x R(x)$$

אם φ פונקציה ב x ו α פונקציה ב x אז $\varphi(\alpha)$ פונקציה ב x

$$\overline{\varphi}_1(\varphi) = \overline{\varphi}_2(\varphi)$$

משפט החליפה:

$$R(x) \wedge \exists y \neg R(y)$$

כאשר x ו y שונים

⊕

⊕ משפט החליפה: משפט קטן, משפט גדול, משפט קטן, משפט גדול

⊕ המשפט של החליפה: משפט קטן, משפט גדול, משפט קטן, משפט גדול

$$M = \left(\underbrace{D^M}_{\substack{\text{קטגוריה} \\ \text{של משתנים} \\ \text{חופשיים}}}, \underbrace{C_0^M, C_1^M, \dots}_{\substack{\text{קטגוריה} \\ \text{של משתנים} \\ \text{קשורים}}}, \underbrace{f_0^M, \dots, f_n^M}_{\substack{\text{פונקציות} \\ \text{חופשיות}}}, \underbrace{R_0^M, \dots, R_m^M}_{\substack{\text{פונקציות} \\ \text{קשורות}}} \right)$$

$(D^M \neq \emptyset)$ $C_i^M \in D^M$ $f_i^M : (D^M)^n \rightarrow D^M$ $R_i^M \subseteq (D^M)^n$

פונקציה (מספר ממוצע) (M)

$$V: \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \rightarrow D^M$$

מבנה

$$\Sigma = (C_0, C_1, f_1(\cdot, \cdot), f_2(\cdot, \cdot), R(\cdot, \cdot))$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 מסמל מסמל מסמל

המבנה של המספרים הממשיים

מבנה 1:

$$M_1 = (N, 0, 1, +, \cdot, \leq)$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 f_1 f_2

מבנה 2:

$$M_2 = (\{0, 1\}^*, '0', '1', \text{next}, \text{reverse}, \text{concat})$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 f_1 f_2

$$\begin{aligned} \bar{V}(c_i) &= c_i^M \\ \bar{V}(x_i) &= V(x_i) \end{aligned}$$

$$\bar{V}(f(t_1, \dots, t_n)) = f^M(\bar{V}(t_1), \dots, \bar{V}(t_n))$$

$$\bar{V}(R(t_1, \dots, t_n)) = T$$

$$(\bar{V}(t_1), \dots, \bar{V}(t_n)) \in R^M$$

$$\bar{V}(a \text{ op } b) = TT_{\text{op}}(\bar{V}(a), \bar{V}(b))$$

$$\bar{V}(a) = TT_1(\bar{V}(a))$$

$$d \in D^M$$

$$\bar{V}[\frac{d}{x}](y) = \begin{cases} d & \text{if } x = y \\ \bar{V}(y) & \text{if } x \neq y \end{cases}$$

$$d \in D^M \quad \text{def} \iff \nabla (\forall x \alpha) = T \quad (*)$$

$$\nabla [d/x] (\alpha) = T$$

$$\text{לפי } d \in D^M \quad \text{def} \iff \nabla (\exists x \alpha) = T \quad (*)$$

$$\nabla [d/x] \alpha = T$$

$$\Sigma = (c_0, c_1, f_1(\cdot), f_2(\cdot), R(\cdot)) \quad \text{ז"ב}$$

$$M = (\mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot, \leq)$$

$$\varphi_1 = R(f_1(x, x), y) \vee R(f_1(y, y), x)$$

$$2x \leq y$$

$$\text{למשל}$$

$$\text{או}$$

$$2y \leq x$$

$$\vee \quad V_1(x) = 0, \quad V_1(y) = 0$$

$$\times \quad V_2(x) = 2, \quad V_2(y) = 3$$

$$V_2(x) = 2 \quad V_2(y) = 3 \quad \text{נאב} \quad \text{מלכ} \quad \text{פסב} \quad \text{דלכ}$$

$$\nabla_2(\varphi_1) = \text{TT}_V(\nabla_2(\alpha), \nabla_2(\beta))$$

$$\nabla_2(\alpha) = R^M(\nabla_2(f_1(\overset{y}{x}, \overset{y}{x})), \nabla_2(\overset{x}{y})) =$$

$$= [F_1^M(\nabla_2(\overset{y}{x}), \nabla_2(\overset{y}{x})) \leq \nabla_2(\overset{x}{y})] =$$

$$= [2 + 2 \leq 3] = F$$

(פז) פנח מ (הנ) .לפנ בזה נאכזר עי מ ופז ענ דפ

$$\varphi_2 = \forall x [\exists y R(f_2(x), y)]$$

למשל קיבלנו

למשל קיבלנו

למשל קיבלנו

למשל קיבלנו $\nabla(\varphi_2) = T$ - למה?

$$\left[\begin{array}{l} \leq \text{נאכזר} \\ +1 \text{ דלכ} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{נאכזר} \\ \text{נאכזר} \\ y \leq x \\ \text{נאכזר} \\ \text{נאכזר} \\ x \leq y \end{array} \right]$$

למשל קיבלנו $\nabla(\varphi_2) = T$ - למה? נאכזר קיבלנו $\nabla(\varphi_2) = T$ - למה? נאכזר קיבלנו $\nabla(\varphi_2) = T$ - למה?

א"א $d_1 \in D^M$ $\text{בס} \iff \nabla (e_2) = T$

א"א $d_1 \in D^M$ $\text{בס} \iff \nabla [d_1/x] (\exists y R(f_2(x), y)) = T$
 - ו $\text{פ} d_2 \in D^M$

$V' = V [d_1/x, d_2/y] (R(f_2(x), y)) = T$
 א"א $(V [d_1/x]) [d_2/y]$

- ו $\text{פ} d_2 \in D^M$ א"א $d_1 \in D^M$ $\text{בס} \iff$

$\underbrace{\nabla_1 (f_2(x))}_{d_1+1} \leq \underbrace{\nabla_1(y)}_{d_2}$

- ו $\text{פ} d_2 \in \mathbb{N}$ א"א $d_1 \in \mathbb{N}$ ($d_1 \in D^M$) $\text{בס} \iff$
 . ו $\therefore d_1+1 \leq d_2$

ש $V_1(x) = V_2(x)$ $x \in FV(\varphi)$ $\text{בס} \text{ א"א } \text{בס}$

(ב' ו $\text{פ} \text{ א"א } \text{בס}$) $\overline{V_1}(\varphi) = \overline{V_2}(\varphi)$

הוכחה

$\nabla (\varphi) = T$, M $\text{מודל} \text{ א"א } (*) 1$

$M, V \models \varphi$ א"א

, $M, V \models \varphi$ $\text{א"א} \text{ ו } \text{בס} \text{ א"א } M$ $\text{מודל} \text{ א"א } (*) 2$

. $M \models \varphi$ א"א

$M, V \models \varphi$ $\text{א"א} \text{ ו } M$ $\text{מודל} \text{ א"א } \text{בס} : \models \varphi$

$M \models \varphi$ M $\text{מודל} \text{ א"א} : \text{א"א} \text{ א"א } \left[\begin{array}{l} \text{א"א א"א א"א א"א} \\ \text{א"א א"א} \\ \text{(Truth)} \end{array} \right]$

(א"א א"א 2)

(Validity)
 $\text{א"א} = \text{א"א}$

$\text{א"א} = \text{א"א}$

, V $\text{מודל} \text{ א"א } M$ $\text{מודל} \text{ א"א} : \Gamma \models^V \varphi$

, V $\text{מודל} \text{ א"א } M$ $\text{מודל} \text{ א"א} : \Gamma \models \varphi$

($M \models \delta$ $\delta \in \Gamma$ $\text{א"א} \text{ א"א}$) $M \models \Gamma$ א"א

($\text{א"א} \text{ א"א}$) $M, V \models \Gamma$ א"א

$M \models \varphi$

א"א

. $M, V \models \varphi$ א"א ($M, V \models \delta$ $\delta \in \Gamma$)

(א"א א"א א"א)

① טענה פיתוס קטן $\models^2$ $\models^1$ $\models^0$

אם $\Gamma \models^2 \varphi$ אז $\Gamma \models^1 \varphi$

הוכחה: נניח $\Gamma \models^2 \varphi$. כל פורמולה φ - $\Gamma \models^1 \varphi$

יהי M מודל Γ - $M \models \Gamma$. נראה $M \models \varphi$.

נניח $M \models \Gamma$ - $M \models \varphi$.

$$\Gamma \models^2 \varphi \iff M, v \models \Gamma$$

$M \models \varphi$ כל v , $M, v \models \varphi$

$\Gamma \models^2 \varphi$: אם M מודל Γ , $M \models \varphi$, אז $\Gamma \models^2 \varphi$

מודל M , $M \models \varphi$, אז $\Gamma \models^2 \varphi$.

② אם $\Gamma \models^2 \varphi$, אז $\Gamma \models^1 \varphi$.

$\Gamma \models^2 \varphi \iff \Gamma \models^1 \varphi$ (הטענה היא שקולה)

אם $\Gamma \models^1 \varphi$, אז $\Gamma \models^2 \varphi$.

$\Gamma \models^2 \varphi$: אם $\Gamma \models^2 \varphi$, אז $\Gamma \models^1 \varphi$.

(אם $\Gamma \models^2 \varphi$, אז $\Gamma \models^1 \varphi$)

③ אם $\Gamma \models^2 \varphi$, אז $\Gamma \models^1 \varphi$.

(אם $\Gamma \models^2 \varphi$, אז $\Gamma \models^1 \varphi$)

אם $\Gamma \models^2 \varphi$, אז $\Gamma \models^1 \varphi$.

$$\varphi = R(x) \wedge \neg R(x)$$

אם $\Gamma \models^2 \varphi$, אז $\Gamma \models^1 \varphi$.

$$\Gamma_1 = \{R(x)\}$$

אם $\Gamma_1 \models^2 \varphi$, אז $\Gamma_1 \models^1 \varphi$.

$$\Sigma = (R(1))$$

$$M = (\{0\}, \{0\})$$

אם $M \models \Gamma$, אז $M \models \varphi$.

אם $\Gamma \models^2 \varphi$, אז $\Gamma \models^1 \varphi$.

$$\Gamma_2 = \{R(x), \neg R(y)\}$$

אם $\Gamma_2 \models^2 \varphi$, אז $\Gamma_2 \models^1 \varphi$.

• $M \models \Gamma$ M מתקן δ , μ , ν ו- ∞ הנ"ל ①

מתקן M כי

• $M \models \Gamma$ $\forall y$ $M \models \neg \forall y R(y)$ כי ①

$d \in D^M$ δ $\in \delta(\dots)$ $\forall y$ $M \models \neg \forall y R(y)$ כי ②

- $d' \in D^M$ - d' מתקן $d' \in R^M$ כי $d' \notin R^M$

$V(x) = d'$ - d' מתקן V כי

$M \models \Gamma$ $\Leftarrow M, V \models \Gamma$ - d' מתקן V כי $V(R(x)) = F$ כי

- d' מתקן M, V כי $M, V \models \Gamma$ כי ②

$M = (\{1, 2\}, \{1\})$

$V(x) = 1$

$1 \in R^M$ כי $M, V \models R(x)$ כי $M, V \models \neg \forall y R(y)$ כי $V[2/y]$ כי

$M, V[2/y] \models R(y)$

• $\Gamma \models \varphi$ כי $M \models \Gamma$ כי $M \models \varphi$ כי

מתקן $M, V \models \delta$ כי $M, V \models \Gamma$ כי $M, V \models \varphi$ כי

• $M, V \models \Gamma$ - d' מתקן V כי M מתקן Γ כי $\Gamma \models \varphi$ כי

$M \models \Gamma$ - d' מתקן M כי $\Gamma \models \varphi$ כי

$\frac{\alpha \equiv \beta}{\alpha \equiv \beta}$	$\frac{\alpha \equiv \beta}{\alpha \equiv \beta}$
$\{B\} \models \alpha$	$\{B\} \models \alpha$

$$\alpha \equiv \beta \iff \models \alpha \leftrightarrow \beta \quad (1)$$

$$\forall \text{ model } M \text{ where } G \models \iff \models \alpha \leftrightarrow \beta \quad (1) \text{ תמיד}$$

$$\nabla(\alpha) = \nabla(\beta) \quad \forall \text{ model } M \text{ where } G \models \iff \nabla \nabla \iff (\nabla(\alpha), \nabla(\beta)) = T$$

$$\models \exists x \varphi \quad \text{or} \quad \models \forall x \varphi \quad \text{since} \quad \models \varphi \quad \text{since} \quad (2)$$

$$\models \varphi \quad \text{since} \quad \models \forall x \varphi \quad (3)$$

$$\models \varphi \quad \not\Leftarrow \quad \models \exists x \varphi \quad \text{תמיד}$$

תמיד תלוי

$$\forall y R(y) \vee S(x) \iff \forall x R(x) \vee S(x)$$

קטגוריה נפרדת

$$\forall x \varphi \rightarrow \varphi[t/x]$$

לחזור ל- x מה- φ

תמיד בו-ב- t

הצגה: עבור נוסח, φ נגזר, x וריבוי, t וריבוי, $\varphi[t/x]$

הצגה: $S = C$

הצגה: $S = C$

$$C[t/x] = C$$

$$x[t/x] = t$$

! $x = y$ אלא

הצגה: $S = y$

$x \neq y$ אלא

$$y[t/x] = y$$

הצגה:

$$S = f(r_1, \dots, r_n)$$

$$f(r_1, \dots, r_n)[t/x] = f(r_1[t/x], \dots, r_n[t/x])$$

הצגה: φ וריבוי

$$\varphi = R(s_1, \dots, s_n) =$$

הצגה:

$$= R(s_1, \dots, s_n)[t/x] = R(s_1[t/x], \dots, s_n[t/x])$$

$$\varphi = \alpha \text{ op } \beta \quad \text{זכור}$$

$$(\alpha \text{ op } \beta)[t/x] = \alpha[t/x] \text{ op } \beta[t/x]$$

$$(\neg \alpha)[t/x] = \neg(\alpha[t/x])$$

$$= \frac{\varphi = \exists y \alpha}{\exists y \alpha}$$

$$(\exists y \alpha)[t/x] = \exists y (\alpha[t/x]) \quad x \neq y \quad \text{רק}$$

$$\frac{x=y}{\text{רק}}$$

$$(\exists x \alpha)[t/x] = \exists x \alpha$$

הינן חוקי החלפה
[exception] כל עוד
לא נחשף שיש
קריסה באופן

החלפה

$$t = f(x, y)$$

$$(R(z))[t/z] = (R(f(x, y)))$$

$$(R(z))[t/w] = R(z) \quad \text{(כאשר } w \text{ לא מופיע ב- } R(z) \text{)}$$

$$(\forall z R(z))[t/z] = \forall z R(z)$$

$$(\forall x R(x))[t/x] = \forall x (R(f(x, y)))$$

הוא מופיע רק ב-
במקום הזה
הוא מופיע רק ב-
הוא מופיע רק ב-

הוא מופיע רק ב-

הוא מופיע רק ב-

הוא מופיע רק ב-

הוא מופיע רק ב-