

10/1/17

הכרזת

לשם ההוכחה: ידוע כי Γ נכונה עבור כל הנוסחאות.

Γ כסדר $\text{GrIns}(\Gamma) \Leftarrow$ סדר.



$\text{GrIns}(\Gamma)^{\text{סדר}} \Rightarrow$ סדרה חדשה

$M \models \text{GrIns}(\Gamma)$ ש.כ. $M \models \Gamma$ אם: M סדר ①

$M \models \Gamma$ ש.כ. $M \models \text{GrIns}(\Gamma)$ אם: סדרה M סדר ②

לשם ההוכחה נשתמש בלמה חשובה ושלמה.

למשל: $\text{SK}(\Gamma)$ סדרה Γ סדרה

לשם ההוכחה: ידוע כי Γ נכונה עבור כל הנוסחאות.

למשל Γ סדרה

למשל: $\text{GrIns}(\text{SK}(\Gamma))$ סדרה Γ סדרה

$\text{SK}(\Gamma)$ סדרה Γ סדרה

$\text{GrIns}(\text{SK}(\Gamma))$ סדרה Γ סדרה

למשל $\text{GrIns}(\text{SK}(\Gamma))$ סדרה

Γ סדרה $\Leftarrow$ סדרה Γ סדרה

סדרה

$\Rightarrow$ ידוע כי סדרה Γ סדרה

למשל: $\text{GrIns}(\text{SK}(\Gamma))$ סדרה

סדרה Γ סדרה

למשל: $\Delta' \in \text{GrIns}(\text{SK}(\Gamma))$ סדרה

$\Delta' \in \{ \text{GrIns}(\text{SK}(\Gamma)) \cup \dots \}$

$\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \Gamma$

$\Delta = \{ \Gamma_1, \dots, \Gamma_n \} \subseteq \Gamma$ סדרה

$\Delta' \in \text{GrIns}(\text{SK}(\Delta))$

$\Delta' \neq \text{GrIns}(\text{SK}(\Delta))$ סדרה

למשל: $\Delta' \neq \text{GrIns}(\text{SK}(\Delta))$

למשל: Δ' סדרה

למשל: Δ' סדרה

$$\Pi = \{ \forall x R(x) \}$$

$$sk(\Pi) = \{ \forall x R(x) \}$$

$$GrIns(sk(\Pi)) = \{ (R(c), R(xc)), R(x^2(c)) \dots \}$$

Δ סקירה $\Leftrightarrow$ סקירה $sk(\Delta)$ $\Leftrightarrow$ סקירה $GrIns(sk(\Delta))$

$\Delta \subseteq GrIns(sk(\Delta))$ סקירה Δ' $\Leftrightarrow$

Π - תבנית קונצרט (סמל) Π - תבנית קונצרט (סמל) Π - תבנית קונצרט (סמל)

סקירה קונצרט Π' קונצרט Π (סמל) סמל

"תבנית סמל קונצרט"

$$\begin{bmatrix} R(x) \\ R(c) \end{bmatrix} \xrightarrow{\varphi} \begin{cases} x_{ij} \\ c_{ij} \end{cases}$$

סקירה $M, V \models \varphi$ - סמל M וסקירה V כן φ

סקירה M כן φ - סמל $M \models \varphi$ (סמל M כן φ - סמל $M \models \varphi$)

סקירה $M, V \models \varphi$ - סמל $M, V \models \varphi$

סקירה M סמל

סקירה M סמל $M \models \varphi$ - סמל $M \models \varphi$

סקירה M סמל $M \models \varphi$ - סמל $M \models \varphi$

$$c_{ij}^M = V(x_{ij}^M)$$

סקירה M סמל $M \models \varphi$ - סמל $M \models \varphi$

סקירה M סמל $M \models \varphi$ - סמל $M \models \varphi$

$$\Sigma = (\dots)$$

$$\Sigma = (\dots, c_1, c_2, \dots)$$

סקירה M סמל $M \models \varphi$ - סמל $M \models \varphi$

$\left[\begin{array}{l} \text{עיתר העשתיים (הוא חלשים)} \\ \text{זאן משה} \end{array} \right] \text{אז} \left[\begin{array}{l} \text{זאן משה} \\ \text{הוא חלשים} \end{array} \right]$
 $\{$

הענק והחומר של (עלם II) כמו שלם I בלחץ משה
 בתחלה • סקנה $GrIns(SK(\phi))$ $\left[\begin{array}{l} \text{כחול} \\ \text{מ} \end{array} \right] \text{סלם I} \oplus$

משל קונסטריות: של קבוצה (נוסחא) Γ

Γ סקנה $\Leftrightarrow$ ב זה קבוצה סופית של Γ סקנה

משל Löwenheim-Skolem (LS): ϕ -סופית נוסחא סלם

(downward) ϕ סקנה $\Leftrightarrow$ יש ϕ -סופית סקנה סופית או קן

מניה (M סופית או קן מניה) (עמסוק מ ϕ)

(upward) אם ϕ -סופית יש סקנה ϕ -סופית (M אינסופית) ϕ

של ϕ אינסופית $\rightarrow$ ϕ -סופית $\rightarrow$ ϕ -סופית $\rightarrow$ ϕ -סופית

$$(\phi \text{ סופית}) \cdot (|M| = \lambda)$$

קבוצה

(down) תחילת ϕ -סופית

סקנה דבריה הוא תחילת ϕ -סופית (כפחול קן מניה)

עמסוק דבריה, ϕ סקנה

$\Leftrightarrow$ יש ϕ -סופית סקנה דבריה וזהו קן מניה

$\Rightarrow$ קבוצה

(upward) זאן (החומר)

זאן זאן ϕ סופית קבוצה דבריה

(אם ϕ אינסופית) מניה זאן ϕ -סופית

ϕ -סופית זאן ϕ -סופית

זאן ϕ -סופית זאן ϕ -סופית

$$\left[\begin{array}{l} \lambda = 2^{\aleph_0} \\ \Sigma' = \Sigma \cup \{c_r \mid r \in \mathbb{R}\} \end{array} \right]$$

זאן ϕ -סופית זאן ϕ -סופית

$\lambda \leq$ זאן

האם יש מודל קטן (model) של תורת הקבוצות?

מבנה
מבנה
מבנה

$$M_N = (N, 0, 1, +, *, =, >)$$

$$\Sigma = (\underbrace{c_0, c_1}_{\text{סמלי קבוצה}}, \underbrace{f_+(\cdot, \cdot), f_*(\cdot, \cdot)}_{\text{פעולה ב- } M_N}, \underbrace{R = (\cdot, \cdot), R_2(\cdot, \cdot)}_{\text{סמלי יחס}})$$

(*) האם יש קטן (model) של Γ ?

$$M = M_N \Leftrightarrow M \models \Gamma$$

לפי LS, δ :

אם Γ הוא, $M_N \models \Gamma$ - אז M_N הוא מודל של Γ .

M_N הוא מודל של Γ - אז $M_N \models \Gamma$ (לפי LS).

[הערה: M_N הוא מודל של Γ אם ורק אם $M_N \models \Gamma$]

$$TA = \{ \varphi \mid M_N \models \varphi \}$$

True
Arithmetic

האם יש מודל של TA ?

אם M_N הוא מודל של TA - אז $M_N \models TA$.

אם $M \neq M_N$ - אז $M \not\models TA$.

אם M הוא מודל של TA - אז $M = M_N$.

לפי LS, δ :

אם M_N הוא מודל של Γ - אז $M_N \models \Gamma$.

$$\Gamma = \{ \varphi_i \mid i \geq 0 \}$$

$$\varphi_i = R_2(c, f_+(f_+(\dots 0, 1), \dots 1))$$

"אם M_N הוא מודל של Γ - אז $M_N \models \Gamma$ "

$TA \cup \Gamma$

אם M_N הוא מודל של $TA \cup \Gamma$ - אז $M_N \models TA \cup \Gamma$.

אם $M \models \Gamma$ - אז $M \models TA$.

אם M_N הוא מודל של Γ - אז $M_N \models \Gamma$.

אם $M \models \Gamma$ - אז $M \models TA$.

אם M_N הוא מודל של Γ - אז $M_N \models \Gamma$.

D^M - אורגניזם המייצא את המוצר
 C^M - אורגניזם המייצא את המוצר
 (C^M, D^M) - זוג אורגניזמים המייצאים את המוצר

יהי Σ' המסלול החדש, נבחר כמראה קומפוסט של M סביב
המרחק Σ' מספרים $AUM + 1$.

$$\Sigma = (c_0, c_1, f_+, f_-, R_+, R_-)$$

$$M^I = (D^M, C_0^M, C_1^M, \dots)$$

Example 02

$$(b) \quad \Sigma = (a, b, f(), R, G)$$

$$\Sigma' = (a', f(), R, G)$$

$$M = (\{0, 1, 2\}, 0, \boxed{1}, +1 \bmod 3, >)$$

$$(1, \boxed{1}) \quad M' = (\{0, 1, 2\}, 0, +1 \bmod 3, >)$$

(1) Δ
 (2) Δ
 (3) Δ
 (4) Δ
 (5) Δ
 (6) Δ
 (7) Δ
 (8) Δ
 (9) Δ
 (10) Δ
 (11) Δ
 (12) Δ
 (13) Δ
 (14) Δ
 (15) Δ
 (16) Δ
 (17) Δ
 (18) Δ
 (19) Δ
 (20) Δ
 (21) Δ
 (22) Δ
 (23) Δ
 (24) Δ
 (25) Δ
 (26) Δ
 (27) Δ
 (28) Δ
 (29) Δ
 (30) Δ
 (31) Δ
 (32) Δ
 (33) Δ
 (34) Δ
 (35) Δ
 (36) Δ
 (37) Δ
 (38) Δ
 (39) Δ
 (40) Δ
 (41) Δ
 (42) Δ
 (43) Δ
 (44) Δ
 (45) Δ
 (46) Δ
 (47) Δ
 (48) Δ
 (49) Δ
 (50) Δ
 (51) Δ
 (52) Δ
 (53) Δ
 (54) Δ
 (55) Δ
 (56) Δ
 (57) Δ
 (58) Δ
 (59) Δ
 (60) Δ
 (61) Δ
 (62) Δ
 (63) Δ
 (64) Δ
 (65) Δ
 (66) Δ
 (67) Δ
 (68) Δ
 (69) Δ
 (70) Δ
 (71) Δ
 (72) Δ
 (73) Δ
 (74) Δ
 (75) Δ
 (76) Δ
 (77) Δ
 (78) Δ
 (79) Δ
 (80) Δ
 (81) Δ
 (82) Δ
 (83) Δ
 (84) Δ
 (85) Δ
 (86) Δ
 (87) Δ
 (88) Δ
 (89) Δ
 (90) Δ
 (91) Δ
 (92) Δ
 (93) Δ
 (94) Δ
 (95) Δ
 (96) Δ
 (97) Δ
 (98) Δ
 (99) Δ
 (100) Δ

TAUF

תהי $\Delta \subseteq \text{TAUF}$ תת קבוצה סופית, נבחרת Δ סופית.

יהי n האינדקס המקסימלי של Δ (כלומר $n \in \Delta$ ו- $n+1 \notin \Delta$).

נגדיר $M = (N, 0, 1, +, *, >, =, n+1)$

$$M = (N, 0, 1, +, *, >, =, n+1)$$

סימנים

סימנים

"תהי"

$$\delta \quad M_n \models TA \iff M \models TA$$

TA - תאוריה

(TA) תאוריה (TA)

TA $\exists \varphi$ קיימת נוסחה

"תהי"

תהי Σ

$$\Sigma = (R, 1)$$

$$R = \{ \dots \}$$

$$n = \{ \exists x_1, \dots, \exists x_n \bigwedge_{i \neq j} (x_i \neq x_j) \}$$

$$\exists x_1 \exists x_2 (x_1 \neq x_2)$$

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (x_1 \neq x_2 \wedge$$

$$x_1 \neq x_3 \wedge$$

$$x_2 \neq x_3)$$

איזה טענות מספקים אל מ?

טענות אינסופיות (Σ^M אינסופי).

האם ניתן אולי לבנות ספקט FOL + לוגיקה?
(FOL = First order logics)
לחלים חזקים

האם ניתן להבנה נכון ה- FOL + לוגיקה?

$\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow x=y)$
ההבנה

בנייה אל GrInz ואלטרנטיבית מופיע

תס-קבוצה סופית של טענות.

דוגמה: למשל הבהנה φ ספקט, אלס אין מבנה הבהנה שספקט טל φ .

$\Sigma = (c_1, c_2) =$

סימנים

$M = (\{1\}, 1, 1)$

מבנה דבור φ :
אלס מבנה הבהנה לא מספק טל φ , כי חייבים
נפרט מ = טל, תכנס למבנה ספקט

(אולי נכלל להשלמה בהבהנה טל, תכנס, תכנס כדי לעבור ספקט)

$\Sigma' = (\dots, E(,))$ $\Sigma = (\dots, =)$

סימנים וסימנים

ה- E (מבנה כולל סימנים וסימנים)

לכל מבנה - יוסיין I = I (אלס)

(מילוי) $E = \dots = \dots$ כל מבנה

$\exists x \exists y E(x,y)$

$\exists x \exists y (x=y)$

$\neg E(c_0, c_0)$

$\neg (c_0 = c_0)$

ספקט

לכל ספקט

(עם אלס לוגיקה של יחס שקילות)
רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי

יוסיין II $\rightarrow$ לכל מבנה

לכל מבנה E - כל מבנה כולל שקילות

$Ref(E) = \forall x E(x,x)$

$$Sym = \forall x \forall y [E(x,y) \rightarrow E(y,x)]$$

$$\text{Trans} = \forall x \forall y \forall z [E(x, y) \wedge E(y, z) \rightarrow E(x, z)]$$

$$E \rightarrow \text{nil} \vee \text{atom} \quad \psi \wedge \text{Ref}(E) \wedge \text{Sym}(E) \wedge \text{Trans}(E) \quad \Leftarrow \psi$$

$\exists x \exists y [x \neq y \wedge f(x) \neq f(y)]$

$$M = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{DM}, \quad \underbrace{\begin{matrix} 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 3 \\ 3 \rightarrow 1 \end{matrix}}_F, \quad \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \right\}}_R \text{ on } \mathbb{R}$$

-n פירט פאר א גע. ווייזט אראפ פאר א פארטאל III ווייזט אראפ
:f לויפט

$$V_{x_1}, \dots, V_{x_n} \quad V_{y_1}, \dots, V_{y_n}$$

$$\left[\left(\bigwedge_{i=1}^n E(x_i, y_i) \right) \rightarrow E(f(x_1, \dots, x_n), f(y_1, \dots, y_n)) \right]$$

Q 85.000 מ"ס, 200 מ"ס - 200 מ"ס

$$V_1, \dots, V_n, V_{n+1}, \dots, V_m$$

$$\left(\bigwedge_{i=1}^n E(x_i, y_i) \right) \longrightarrow \left(R(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow R(y_1, \dots, y_n) \right)$$

ה'תשנ"ח

$$\forall x \forall y [E(x, y) \rightarrow E(f(x), f(y))]$$

WPN - 13 R

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 (E(x_1, y_1) \wedge E(x_2, y_2) \rightarrow R(x_1, x_2) \leftrightarrow R(y_1, y_2))$$

$$\hat{\psi} = (\psi' \wedge_{\text{קונטנר}}^E \wedge_{\text{קונטנר}}^E) \quad \leftarrow \psi$$

= מקרה ψ סביר סתם, הטקסט ψ $\Leftrightarrow$ E סביר סתם ψ

מקרה

✓ $\Leftrightarrow$ E נכון, ψ נכון

$\psi \rightarrow$ M $\hat{M} = \hat{\psi}$ נכון $\Rightarrow$

$E^{\hat{M}}$ סביר סתם, קונטנר ψ

$$M = \left(\begin{array}{c} \text{קונטנר} \\ E^{\hat{M}} \\ \text{קונטנר} \\ D^{\hat{M}} / E^{\hat{M}} \end{array} \right)$$

$$\hat{M} = (\{1,2,3\}, \begin{array}{c} E^{\hat{M}} \\ \text{קונטנר} \\ \{1,2\} \\ \{3\} \end{array})$$

$$M = (\{f_{1,2}, f_{3}\})$$

פונקטור סתם

$$C_i^M = [C_i^{\hat{M}}]$$

$\hat{M} \rightarrow$ M פונקטור

פונקטור

$$f^M([x_1], \dots, [x_n]) = [f^{\hat{M}}(x_1, \dots, x_n)]$$

$\rightarrow$ $E^{\hat{M}}$ קונטנר ψ $\rightarrow$ E^M קונטנר ψ

סמל

$$([x_1], \dots, [x_n]) \in R^M$$

$\Downarrow$

$$(x_1, \dots, x_n) \in R^{\hat{M}}$$

$E^{\hat{M}}$ קונטנר ψ $\rightarrow$ E^M קונטנר ψ

$M \models \alpha'$
" E^M סביר סתם"
" ψ סביר סתם"

$$\Leftrightarrow \hat{M} \models \alpha \quad \alpha \text{ נכון, } \psi \text{ סביר סתם}$$