

אלגברה לינארית 2א

© ארזים

29 במרץ 2016

חשוב לזכור שכאשר אנחנו מנסחים משפט למטריצות הוא תקף גם לטרנספורמציות (על ידי ייצוג מטריציוני), ולהיפך.

שאלה טבעית: בהנתן $A \in M_n(F)$ ושדה $F \subseteq K$ המכיל את F , האם m_A נשאר אותו פולינום כאשר חושבים על A במטריצה מעל K ? מה שיכול עקרונית להתרחש הוא שהגדלת השדה מוסיפה לנו סקלרים כך שעכשיו ישנו פולינום ממעלה קטנה יותר שמתאפס על המטריצה. נוכיח שזה לא המצב. לצורך ההוכחה נסמן בתור $m_A^F(x)$ את הפולינום המינימלי מעל F ובתור $m_A^K(x)$ את הפולינום המינימלי מעל K .

משפט 0.1 תמיד מתקיים $m_A^F = m_A^K$.

הוכחה: די להוכיח

$$\deg m_A^F = \deg m_A^K$$

שכן ראינו כבר כי בדרגת הפולינום המינימלי קיים פולינום מתוקן יחיד וזהו הפולינום המינימלי.

בוודאי ייתכן רק $\deg m_A^K \leq \deg m_A^F$. יש להראות שהדרגה לא יורדת ממש. כדי להראות שזה לא קורה, נשתמש במשפט שהוכחנו, שאומר

$$\dim m_A^F = d = \dim \text{span}_F \{I, A, A^2, \dots, A^{d-1}\}$$

זאת אומרת שהקבוצה $\{A^i\}_{i=0}^{d-1}$ בלתי-תלויה, וחזקות גבוהות יותר הן צירוף לינארי שלהן.

וכנ"ל מעל K . לכן, כדי להראות שהדרגה לא יורדת מעל K , די להראות שהטריצות $I, A, \dots, A^{d-1}$ נשארות בלתי-תלויות גם מעל K , בתוך המרחב $M_n(K)$. זה יוכיח שהדרגה החדשה היא לפחות כמו הקודמת, ויראה שהדרגה לא יכולה לרדת. העובדה שזה קורה נובעת מהטענה הכללית הבאה:

טענה 0.2 יהיו $v_1, \dots, v_r \in F^{(m)}$ ווקטורים בלתי תלויים, ויהי $F \subseteq K$ שדה שמכיל את F . אזי $v_1, \dots, v_r$ נשארים בלתי-תלויים גם כווקטורים במרחב $K^{(m)}$.

הוכחה: נשלים אותם לבסיס מעל F : $v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_m$. כעת נשים לב שאותם m ווקטורים הם בסיס למרחב $K^{(m)}$ כאשר עובדים מעל K . מדוע? משום שהווקטורים

הללו הם בסיס אם ורק אם הדטרמיננטה של המטריצה שווקטורים אלה הם שורותיה אינה מתאפסת. הדטרמיננטה של מטריצה לא משתנה במעבר לשדה גדול יותר, ולכן גם כשחושבים על $v_1, \dots, v_m$ כווקטורים מעל K , הם ממשיכים להיות בסיס, ולכן כל תת קבוצה שלהם בלתי-תלויה לינארית.

■

■

ובכך סיימנו את ההוכחה.

משפט 0.3 תהי $A \in M_n(F)$. אם λ הוא ערך עצמי של A אזי הוא שורש של m_A .

משפט זה נובע מהטענה הכללית הבאה:

טענה 0.4 אם $p(A) = 0$ וכן λ ערך עצמי של A אזי $p(\lambda) = 0$.

הוכחה: שמים לב שלכל פולינום $g(x) \in F[x]$, אם $Av = \lambda v$ אזי $g(A)v = g(\lambda)v$. כעת

$$g(A) = 0 \Rightarrow g(A)v = 0 \Rightarrow g(\lambda)v = 0 \Rightarrow g(\lambda) = 0$$

■

כאשר השוויון האחרון נכון כי $v \neq 0$ בתור ווקטור עצמי.

משפט 0.5 אם λ הוא שורש של m_A , אזי λ הוא ערך עצמי של A .

הוכחה: ידוע כי $m_A(\lambda) = 0$. כמו כן, ידוע כי $m_A \mid f_A$ (כי $f_A(A) = 0$ לפי קיילי-המילטון). מכאן נובע כי $f_A(\lambda) = 0$, ולכן λ ערך עצמי של A .

■

לכן, בסך הכל מתקבל ששורשי m_A בשדה F הם בדיוק הערכים העצמיים של A . נזכר שאנחנו יודעים זאת הפולינום האופייני.

משפט 0.6 לכל $A \in M_n(F)$ מתקיים

$$m_A \mid f_A \mid m_A^n$$

זה למעשה אומר שלשני הפולינומים יש את אותם שורשים - הבעיה היא שמעל F לא תמיד רואים אותם.

הוכחה: כפי שדיברנו, תמיד ישנו שדה $F \subseteq K$ שבו f_A מתפצל למכפלת גורמים לינאריים. כאשר עוברים לעבוד מעל K , המשפטים הקודמים מראים שלפולינומים m_A, f_A יש את אותם שורשים - הערכים העצמיים של A מעל K . לכן, הפירוקים של f_A, m_A למכפלת גורמים אי-פריקים בחוג $K[x]$ נראים כך:

$$\begin{aligned} f_A(x) &= \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{n_i} \\ m_A(x) &= \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{m_i} \end{aligned}$$

כאשר לכל $i \neq j$ מתקיים $\lambda_i \neq \lambda_j$, וכן לכל $1 \leq i \leq r$ מתקיים $1 \leq m_i \leq n_i \leq n$.
אלה נובעים בנפרד:

$m_i \leq n_i$ שכן $m_A \mid f_A$, ומיחידות הפירוק בפולינומים.
 $n_i \leq n$ שכן $\deg f_A = n$.
 $1 \leq m_i$ שכן כל שורש של f_A הוא גם שורש של m_A .
כעת,

$$(m_A(x))^n = \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{m_i \cdot n}$$

ומכיוון שמתקיים $m_i \cdot n \geq n_i$, נקבל

$$f_A \mid m_A^n$$

עד כה הוכחנו את הטענה במחיר של מעבר לשדה גדול יותר. כדי לסיים ניזכר בשמפט שהוכחנו כמסקנה מחילוק עם שארית:

משפט 0.7 אם $F \subseteq K$ וכן $f(x), g(x) \in F[x]$, אזי אם $g \mid f$ מעל K אזי גם $g \mid f$ מעל F .

כשמשתמשים במשפט הזה בסיטואציה שלנו מקבלים שמתקיים גם $f_A \mid m_A^n$ מעל השדה המקורי F . זה מסיים את ההוכחה. ■

ניזכר שראינו כי במטריצה המלווה של פולינום f מתקיים $f_A = m_A = f$ (ללא קשר לשאלה האם הערכים העצמיים של A הם בשדה F או לא).

משפט 0.8 אם A מטריצה בצורת בלוקים לאורך האלכסון:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix}$$

אזי

$$m_A = \text{lcm}(m_{A_1}, \dots, m_{A_k})$$

זה נובע ישירות מכך שלכל פולינום $g(x) \in F[x]$,

$$g(A) = \begin{pmatrix} g(A_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(A_k) \end{pmatrix}$$

ולכן כדי להתאפס על A יש להתאפס על כל בלוק, כלומר להתחלק בפולינום המינימלי של כל בלוק.

מקרה פרטי קל של הטענה הזו הוא חישוב פולינום מינימלי של מטריצה לכסינה: אם A דומה למטריצה אלכסונית אז יש להן את אותו פולינום מינימלי, ועבור מטריצה אלכסונית:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

וכעת נחשוב עליה כמטריצת בלוקים, כשכל בלוק הוא בגודל 1×1 . כעת מהטענה הכללית על פולינום מינימלי של מטריצת בלוקים, נובע:

$$m_A = \text{lcm}(x - \alpha_1, \dots, x - \alpha_n) = \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)$$

כאשר $\lambda_i \in \{\alpha_j\}$ נציגים של הערכים השונים מבין α_j , כאשר כל α_j מופיע פעם אחת בדיוק.