

אלגברה לינארית 2א

© ארזים

2 ביוני 2016

הבעיה המרכזית בפרק זה: בהינתן טרנספורמציה לינארית במרחב מכפלה פנימית (או מטריצה, במכפלה פנימית סטנדרטית), מתי ניתן ללכסן ביחס לבסיס שהוא גם אורתונורמלי? כאשר ניתן לעשות זאת, נאמר שהטרנספורמציה לכסינה אורתוגונלית/אוניטרית. בהקשר של מטריצה $A: A$ תהיה לכסינה אורתוגונלית/אוניטרית אם $T_A(v) = Av$ היא כזו, כלומר קיים בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ של ווקטורים עצמיים של A . כלומר, קיימת P הפיכה ואורתוגונלית/אוניטרית המקיימת $P^{-1}AP$ היא מטריצה אלכסונית. כדי להבין תנאי שהוא בוודאי הכרחי ללכסון כזה, נניח כי T לכסינה אוניטרית, ויהי B בסיס אורתונורמלי מלכסן. נסמן $A = [T]_B$. כעת, ידוע כי $\bar{A} = [T^*]_B = A^*$ (כי B אורתונורמלי, וכן A אלכסונית). כעת ברור כי A, A^* מתחלפות בכפל (שכן כל שתי מטריצות אלכסוניות מתחלפות בכפל), כלומר $AA^* = A^*A$, כעת, $AA^* = [TT^*]_B, A^*A = [T^*T]_B$. לכן, $TT^* = T^*T$.

מסקנה 0.1 אם T לכסינה אורתוגונלית/אוניטרית, אזי בהכרח T נורמלית ($TT^* = T^*T$).

דיון דומה ניתן לעשות גם למטריצות: אם קיימת P אוניטרית/אורתוגונלית כך שהמטריצה $D = P^{-1}AP$ אלכסונית, אזי $D^* = (P^{-1}AP)^* = P^*A^*(P^{-1})^* = P^{-1}A^*P$ משום שהמטריצות D, D^* אלכסוניות הן מתחלפות, ולכן נקבל כי

$$\begin{aligned} DD^* &= P^{-1}APP^{-1}A^*P = P^{-1}AA^*P \\ D^*D &= P^{-1}A^*PP^{-1}AP = P^{-1}A^*AP \\ P^{-1}AA^*P &= P^{-1}A^*AP \\ AA^* &= A^*A \end{aligned}$$

לכן אם A לכסינה אורתוגונלית/אוניטרית אזי היא בהכרח נורמלית ($AA^* = A^*A$). הדוגמאות החשובות ביותר: $T^{-1} = T^*, T = T^*$.

דוגמא מטריצה שאינה מהצורה הזו:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ AA^t &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 3 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$$AA^t = A^t A = \begin{pmatrix} 12 & -4 & 0 \\ -4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

ישנן הרבה טרנספורמציות נורמליות שאינן אורתוגונליות/אוניטריות או צמודות לעצמן, אבל אנחנו נראה שמתוך שתי המשפחות האלה ניתן לבנות את כולן:

טענה 0.2 נניח כי $U^{-1} = U^*$, $R = R^*$, וכך $RU = UR$. אזי $T = RU$ היא נורמלית.

הוכחה:

$$TT^* = (RU)(RU)^* = (RU)(U^*R^*) = RUU^{-1}R = R^2$$

$$T^*T = (RU)^*(RU) = (U^*R^*)(RU) = U^{-1}RRU = RU^{-1}UR = R^2$$

■

בהמשך נוכיח שכל טרנספורמציה נורמלית ניתן להציג בצורה הזו, ונראה כי גם טרנספורמציה הפיכה כללית ניתן להציג כך, בלי התנאי על ההתחלפות של R, U . הטענה הזו נכונה גם ללא הפיכות, אבל לא נוכיח אותה.

משפט 0.3 (המשפט הספקטרלי) מעל $\mathbb{C}$, אם T נורמלית אזי קיים למרחב V בסיס אורתונורמלי של ווקטורים עצמיים של T .

הערה 0.4 מעל $\mathbb{R}$, אותו דבר נכון, בתנאי שכל שורשי הפולינום האופייני הם ממשיים - מסתבר שזה מתרחש רק עבור המקרה $T = T^*$:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\lambda_1} \end{pmatrix} = [T^*]_B$$

מכאן נובע בהתאם המשפט על לכסון אורתוגונלי/אוניטרי של מטריצות נורמליות. ננסח את המשפט בצורה כללית:

משפט 0.5 (המשפט הספקטרלי) יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. תהי T טרנספורמציה לינארית נורמלית ונניח שהפולינום האופייני שלה מתפצל מעל $\mathbb{F}$. אזי T ניתנת ללכסון אורתוגונלית/אוניטרית.

לפני הוכחת המשפט נוכיח מספר טענות.

טענה 0.6 נניח כי S נורמלית וכי $v \in \ker S$. אזי $v \in \ker S^*$.

הוכחה:

$$\|S^*v\|^2 = \langle S^*v, S^*v \rangle = \langle v, SS^*v \rangle = \langle v, S^*Sv \rangle = \langle Sv, Sv \rangle = \|Sv\|^2 = 0$$

■

מסקנה מיידית היא הטענה הבאה:

טענה 0.7 אם T נורמלית, אזי $Tv = \lambda v$ אזי $T^*v = \bar{\lambda}v$

הוכחה: נסמן $S = T - \lambda I$. ההנחה אומרת שמתקיים $Sv = 0$. כמו כן, $S^* = (T - \lambda I)^* = T^* - \bar{\lambda}I$. נשים לב שגם S נורמלית:

$$\begin{aligned} SS^* &= (T - \lambda I)(T^* - \bar{\lambda}I) = TT^* - \lambda T^* - \bar{\lambda}T + |\lambda|^2 I \\ S^*S &= (T^* - \bar{\lambda}I)(T - \lambda I) = T^*T - \lambda T^* - \bar{\lambda}T + |\lambda|^2 I \end{aligned}$$

והביטויים שווים, שכן $TT^* = T^*T$. כעת, מהטענה הקודמת, $S^*v = 0$, כלומר $(T^* - \bar{\lambda}I)v = 0$, ולכן $T^*v = \bar{\lambda}v$.

■

טענה 0.8 תהי T נורמלית, ויהיו u, v וקטורים עצמיים עם ערכים עצמיים שונים, כלומר

$$Tv = \alpha v, Tu = \beta u$$

כאשר $\alpha \neq \beta$. אזי $u \perp v$.

הוכחה: נחשב:

$$\begin{aligned} \alpha \langle v, u \rangle &= \langle Tv, u \rangle = \langle v, T^*u \rangle = \langle v, \bar{\beta}u \rangle = \bar{\beta} \langle v, u \rangle \\ \alpha \langle v, u \rangle &= \bar{\beta} \langle v, u \rangle, \alpha \neq \bar{\beta} \\ \langle v, u \rangle &= 0 \end{aligned}$$

■

טענה 0.9 תהי T נורמלית ויהי v וקטור עצמי של T , כלומר $Tv = \alpha v$. יהי $U = \{v\}^\perp$. אזי U הוא T -אינווריאנטי.

הוכחה: יהי $u \in U$. יש להוכיח שגם $Tu \in U$, כלומר $\langle v, Tu \rangle = 0$.

$$\langle v, Tu \rangle = \langle T^*v, u \rangle = \langle \bar{\alpha}v, u \rangle = \bar{\alpha} \langle v, u \rangle = 0$$

■

כעת אנחנו מוכנים להוכחת המשפט הספקטרלי. **הוכחה:** באינדוקציה על $\dim V$. אם $\dim V = 1$, אין מה להוכיח.

כעת נניח כי המשפט ידוע כאשר $\dim V \leq n$, ונוכיח עבור $\dim V = n + 1$. בגלל ההנחה על $f_T(x)$ קיים ערך עצמי לשל T בשדה $\mathbb{F}$. יהי $v \in V$ ווקטור עצמי מנורמל

המקיים $Tv = \lambda v$. יהי $U = \{v\}^\perp$. אזי $\dim U = \dim V - 1 = n$. U הוא T -אינווריאנטי, וכן T^* -אינווריאנטי. נביט בצמצום של T למרחב U : היא נשארת נורמלית שם, כי מתקיים $TT^*(u) = T^*T(u)$ לכל $u \in U$ ובפרט לכל $u \in U$. ניקח בסיס כלשהו B של U , וכעת $B \cup \{v\}$ הוא בסיס של V , והמטריצה המייצגת את T ביחס לבסיס B היא

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

כאשר $A = [T|_U]_B$. לכן, מתקיים $f_T(x) = (x - \lambda) \cdot f_{T|_U}(x)$. כעת, כיוון שהפולינום $f_T(x)$ מתפצל מעל $\mathbb{F}$, אזי גם $f_{T|_U}(x)$ (זה נובע מיחידות הפירוק). לפיכך, הצמצום של T על U מקיים את כל הנחות המשפט - טרנספורמציה נורמלית שהפולינום האופייני שלה מתפצל. לכן נוכל להפעיל את הנחת האינדוקציה. היא נותנת לנו בסיס אורתונורמלי של ווקטורים עצמיים, שנסמנו B .
 כעת, $B \cup \{v\}$ הוא בסיס אורתונורמלי של V שהוא אורתונורמלי ומלכסן את T . ■

איך מתבצע לכסון אורתוגונלי/אוניטרי של טרנספורמציה או מטריצה בפועל?

1. מחשבים את $f_T(x)$ או $f_A(x)$ ומוצאים את הערכים העצמיים.
2. לכל ערך עצמי מוצאים את בסיס למרחב העצמי V_λ .
3. בצעו לכל בסיס כזה את תהליך גרם-שמידט.
4. איחוד הבסיסים שייתקבלו יהיה בסיס אורתונורמלי ומלכסן.