

אלגברה לינארית א2

© ארזים

24 במאי 2016

משפט 0.1 (המשפט הספקטרלי עבור טרנספורמציות צמודות לעצמן) תהי T טרנספורמציה לינארית צמודה לעצמה במרחב מכפלה פנימית V מעל $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. אזי קיים בסיס אורתונורמלי של V שמורכב מווקטורים עצמיים של T . בפרט, אם $T = T^*$, אזי T ניתנת ללכסון, הן במקרה המרוכב הן במקרה הממשי.

הוכחה: לשם ההוכחה נוכיח ראשית טענה שמראה את השימוש בהנחה:

למה 0.2 תהי $S = S^*$, ויהי $v \in V$. אם $S^2 v = 0$ אזי $Sv = 0$.

הוכחה:

$$0 = \langle S^2 v, v \rangle = \langle Sv, S^* v \rangle = \langle Sv, Sv \rangle = \|Sv\|^2$$

ולכן $Sv = 0$.

מסקנה 0.3 אם λ ערך עצמי של טרנספורמציה לינארית צמודה לעצמה, ומתקיים $(T - \lambda I)^2 v = 0$, אזי $(T - \lambda I)v = 0$.

הוכחה: הוכחנו שערך עצמי של T כזו הוא בהכרח ממשי. נביט בהעתקה $S = T - \lambda I$. נקבל כי

$$S^* = (T - \lambda I)^* = T^* - (\lambda I)^* = T - \bar{\lambda} I = T - \lambda I = S$$

(זהו למעשה מקרה פרטי של טענה כללית קלה: הפרש או סכום של טרנספורמציות צמודות לעצמן הוא גם כן צמוד לעצמו). כעת יש להוכיח כי $S^2 v = 0 \Rightarrow Sv = 0$, וזו בדיוק הלמה הקודמת.

כעת נוכל להוכיח את המשפט - נוכיח ראשית שניתן ללכסן, ביחס לבסיס כלשהו. נשים לב שהוכחנו שגם במקרה $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, הפולינום האופייני של T מתפצל למכפלת גורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$ (שכן כל הערכים העצמיים הם ממשיים). כעת נזכור כי במצב זה, T ניתנת ללכסון אם ורק אם לכל ערך עצמי λ של T מתקיים $\tilde{V}_\lambda = V_\lambda$. ניזכר בהגדרות:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_\lambda &= \{v \in V \mid \exists m. (T - \lambda I)^m v = 0\} \\ V_\lambda &= \{v \in V \mid (T - \lambda I)v = 0\}\end{aligned}$$

ניזכר כי T ניתנת ללכסון אם ורק אם $V = \bigoplus V_\lambda$, בעוד שתמיד מתקיים, תחת ההנחה שהפולינום האופייני מתפצל, כי $V = \bigoplus \tilde{V}_\lambda$ - זו מסקנה ממשפט הפירוק הפרימרי. לסיום ההוכחה, נשים לב שבמקרה שבו $T = T^*$ אכן מתקיים $\tilde{V}_\lambda = V_\lambda$ לכל λ . אחרת קיים $u \in \tilde{V}_\lambda \setminus V_\lambda$, שיקיים $(T - \lambda I)^m u = 0$ עבור $m \geq 2$ כלשהו, וכן כי $(T - \lambda I)u \neq 0$. נוכיח להניח כי m הוא המינימלי שמקיים זאת. עתה, נביט בווקטור $v = (T - \lambda I)^{m-2}u$. כעת מתקיים כי $(T - \lambda I)^2 v = (T - \lambda I)^m u = 0$, וכן $(T - \lambda I)v \neq 0$. שכן m היה מינימלי - וזו סתירה למסקנה מן הלמה. כעת, כדי לסיים את ההוכחה, יש להראות מדוע קיים בסיס אורתונורמלי מלכסן. העובדה הבסיסית האחרתית לכך היא הטענה הבאה (מן התרגיל):

טענה 0.4 אם $T = T^*$, $Tu = \beta u$, $Tv = \alpha v$, אזי $u \perp v$, $\alpha \neq \beta$.

עתה, לכל ערך עצמי λ של T , נמצא בעזרת תהליך גרס-שמידט בסיס אורתונורמלי של V_λ . איחוד הבסיסים הללו יהיה בסיס אורתונורמלי של V שמלכסן את T (שכן הניצבות של וקטורים עצמיים עם ערכים שונים מובטחת לנו מהטענה). בזאת סיימנו את הוכחת המשפט הסקטרי לסטרנספורמציות שצמודות לעצמן. ■

נשים לב שכאשר $A = A^*$ (מטריצות) המשפט אומר שקיימת P הפיכה כך שהמטריצה $P^{-1}AP$ אלכסונית, ועמודות P הן בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ (ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית). תת הפרק הבא שלנו עוסק בהבנת מטריצות מהצורה הנ"ל - מטריצות אוניטריות (מעל $\mathbb{C}$) או אורתוגונליות (מעל $\mathbb{R}$).

1 טרנספורמציות אוניטריות/אורתוגונליות

הגדרה 1.1 יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, ותהי $T : V \rightarrow V$ טרנספורמציה לינארית. T נקראת אוניטרית (מעל $\mathbb{C}$) או אורתוגונלית (מעל $\mathbb{R}$) אם היא הפיכה, וכן מתקיים $T^* = T^{-1}$. במילי אחרות, $TT^* = T^*T = I$.

דוגמא אם $Tv = \lambda v$, $T^*v = \bar{\lambda}v$. כדי לקבל T אוניטרית צריך להתקיים $T = T^{-1}$, כלומר $|\lambda|^2 = \lambda\bar{\lambda} = 1$, כלומר $\bar{\lambda} = \lambda^{-1}$.
מעל $\mathbb{R}$ - $\lambda = \pm 1$.
מעל $\mathbb{C}$ - $\lambda = e^{i\theta}$.

דוגמא הסברנו את הדוגמא הזו בעבר - לכל זווית $0 \leq \theta < 2\pi$, נגדיר T_θ - סיבוב בזווית θ במישור $\mathbb{R}^2$. כעת טרנספורמציה זו היא אורתוגונלית, שכן $\langle T_\theta v, u \rangle = \langle v, T_{-\theta} u \rangle$, ומתקיים $T_{-\theta} = (T_\theta)^{-1}$. זאת משום שהמכפלה הפנימית הסטנדרטית היא פונקציה של הזווית בין הווקטורים והאורך שלהם - גדלים שלא משתנים תחת סיבוב.

דוגמא (חשובה) שיקוף במישור $\mathbb{R}^2$ ביחס לציר כלשהו סביב הראשית. נדבר על כך יותר בהקשר של הדיון במטריצות אוניטריות ואורתוגונליות.

טענה 1.2 עבור טרנספורמציה לינארית $T : V \rightarrow V$, כאשר V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. התנאים הבאים שקולים:

1. T אוניטרית/אורתוגונלית.

2. $\forall u, v \in V \quad \langle Tv, Tu \rangle = \langle v, u \rangle$ (כלומר T שומרת על המכפלה הפנימית).

3. $\forall v \in V \quad \|Tv\| = \|v\|$ (כלומר T שומרת על הנורמה).

הוכחה: 1 $\Leftarrow$ 2:

$$\langle Tv, Tu \rangle = \langle v, T^*Tu \rangle = \langle v, Iu \rangle = \langle v, u \rangle$$

2 $\Leftarrow$ 3:

$$\|Tv\|^2 = \langle Tv, Tv \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2$$

3 $\Leftarrow$ 1: נסמן $S = T^*T - I$, ונרצה להראות שמתקיים $S = 0$. נשים לב כי

$$S^* = (T^*T - I)^* = (T^*T)^* - I^* = T^*(T^*)^* - I = T^*T - I = S$$

כעת,

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= \langle v, v \rangle = \|Tv\|^2 = \langle Tv, Tv \rangle = \langle v, T^*Tv \rangle \\ \langle v, v \rangle &= \langle v, T^*Tv \rangle \\ \langle v, T^*Tv - v \rangle &= 0 \\ \langle v, Sv \rangle &= 0 \\ \langle Sv, v \rangle &= 0 \end{aligned}$$

■ וזאת לכל $v \in V$. כמו כן, $S = S^*$, ולכן מטענה שראינו בעבר מתקיים $S = 0$.

בהסתכלות גיאומטרית, המשמעות של תנאי 3 בטענה היא שהטרנספורמציה שומרת על מרחקים.

הערה 1.3 בעוד שטרנספורמציות לינאריות צמודות לעצמן היו סגורות תחת סכום והפרש, הן לא סגורות תחת הרכבה. לעומת זאת, טרנספורמציות אורתוגונליות/אוניטריות סגורות תחת הרכבה אך לא תחת סכום או הפרש. למשל, I אוניטרית, אבל $I + I = 2I$, $I - I = 0$ שתיהן לא אוניטריות. עבור הרכבה, לעומת זאת, מתקיים

$$(TS)^*(TS) = (S^*T^*)(TS) = S^*(T^*T)S = S^*IS = S^*S = I$$

באופן דומה, אם T אוניטרית/אורתוגונלית אזי כך גם ההופכית שלה, שכן

$$(T^{-1})^* T^{-1} = (T^*)^{-1} T^* = I$$

משפט 1.4 התנאים הבאים על T שקולים:

1. T אוניטרית/אורתוגונלית.

2. T מעבירה כל בסיס אורתונורמלי של V לבסיס אורתונורמלי של V .

3. קיים בסיס אורתונורמלי של V שתמונתו תחת T היא בסיס אורתונורמלי של V .

הוכחה: $1 \Leftrightarrow 2$:

תהי T אוניטרית/אורתוגונלית והי $\{e_i\}$ בסיס אורתונורמלי של V . נסמן $\varepsilon_i = Te_i$.

$$\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \langle Te_i, Te_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$$

ולכן גם $\{\varepsilon_i\}$ בסיס אורתונורמלי של V .

$2 \Leftrightarrow 3$: טריוויאלי.

$3 \Leftrightarrow 1$:

יהי $\{e_i\}$ הבסיס האורתונורמלי שעבור ידוע כי $\{Te_i\}$ הוא גם כן בסיס אורתונורמלי, כלומר מתקיים

$$\langle e_i, e_j \rangle = \langle Te_i, Te_j \rangle = \delta_{i,j}$$

שוב, נסמן $\varepsilon_i = Te_i$. נבצע חזרה מדויקת על ההוכחה בטענה הקודמת של $1 \Leftrightarrow 3$ עבור הוקטורים הללו: נסמן $S = T^*T - I$. חישוב זה לקודם נותן:

$$\begin{aligned} \delta_{i,j} &= \langle e_i, e_j \rangle = \langle Te_i, Te_j \rangle = \langle e_i, T^*Te_j \rangle \\ \langle e_i, (T^*T - I)e_j \rangle &= 0 \\ \langle e_i, Se_j \rangle &= 0 \\ \langle Se_i, e_j \rangle &= 0 \end{aligned}$$

וזאת עבור כל i, j . כמו קודם, נרצה להראות כי $S = 0$. ידוע לנו כי $\langle Se_i, e_j \rangle = 0$ לכל i, j ושימוש בלינאריות מאפשר להעביר את העובדה הזו לכל שני ווקטורים u, v :

$$\begin{aligned} v &= \sum a_i e_i \\ u &= \sum b_j e_j \\ \langle Sv, u \rangle &= \left\langle \sum a_i Se_i, \sum b_j e_j \right\rangle = \sum_{i,j} a_i \bar{b}_j \langle Se_i, e_j \rangle = 0 \end{aligned}$$

לכן $\langle Sv, u \rangle = 0$ לכל $u, v \in V$. נבחר $u = Sv$ ונקבל $\|Sv\|^2 = \langle Sv, Sv \rangle = 0$ לכל $v \in V$. כלומר לכל $v \in V$ מתקיים $Sv = 0$, ולכן $S = 0$. ■

טענה 1.5 אם T אוניטרית/אורתוגונלית, כל ערך עצמי λ שלה מקיים $|\lambda| = 1$.

הוכחה: עבור v ווקטור עצמי עם ערך עצמי λ מתקיים

$$\begin{aligned} |\lambda| \|v\| &= \|Tv\| = \|v\| \\ |\lambda| &= 1 \end{aligned}$$

■

הגדרה 1.6 תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ נקראת אוניטרית (מעל $\mathbb{C}$) או אורתוגונלית (מעל $\mathbb{R}$) אם

$$A^*A = AA^* = I$$

דוגמא $A^* = \lambda^{-1}I, |\lambda| = 1, A = \lambda I$

דוגמא סיבוב של θ : $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. $A^* = A^t = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ - וזאת

$$AA^* = A^*A = I$$