

אלגברה לינארית 2א

© ארזים

17 במאי 2016

נשים לב שבהינתן מרחב מכפלה פנימית V מעל $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, כל $u \in V$ מגדיר פונקציונאל לינארי $f_u \in V^*$ באופן הבא:

$$f_u(v) = \langle v, u \rangle$$

תזכורת בהינתן מרחב ווקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$ כלשהו, המרחב הדואלי V^* מוגדר להיות

$$\{f: V \rightarrow \mathbb{F} \mid (\forall v_1, v_2 \in V. f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)) \wedge (\forall v \in V, t \in \mathbb{F}. f(t \cdot v) = t \cdot f(v))\}$$

משפט 0.1 (משפט ההצגה של ריס) כל פונקציונאל לינארי $f \in V^*$ הנו מהצורה שלמעלה, כלומר לכל $f \in V^*$ קיים $u \in V$ יחיד כך שמתקיים $f = f_u$, כלומר $f(v) = \langle v, u \rangle$ לכל $v \in V$.

הוכחה: נתון $f \in V^*$. נגדיר $W = \ker f$.
אפשרות ראשונה: $f \equiv 0$. במקרה זה לוקחים $u = 0$ וברור כי זהו הווקטור היחיד שמקיים $\langle v, u \rangle = 0$ לכל v .
אפשרות שנייה: נסמן $\dim V = n$, ואז $\dim W = n - 1$ (משום שמימד התמונה הוא 1 - משפט המימדים לטרנספורמציות לינאריות). לכן, אם קיים u כנדרש, הוא חייב להיות ניצב לכל איברי W . מצד שני, כל u שנבחר מתוך $W^\perp$ יקיים את הנדרש, $f = f_u$, לכל $w \in W$:
 $f_u(w) = \langle w, u \rangle = 0$ וכן $f(w) = 0$.
ניזכר שממשפט שהוכחנו, $V = W \oplus W^\perp$, ולכן בפרט $\dim W^\perp = \dim V - \dim W = 1$.
1. לכן, זה מגדיר מרחב חד-מימדי של ווקטורים שבו נחפש את הווקטור u שעבורו $f = f_u$.
כדי למצוא במדויק u כזה, ניקח $u_0 \in W^\perp$ כלשהו, ונגדיר

$$u = \left(\frac{\overline{f(u_0)}}{\|u_0\|^2} \right) \cdot u_0$$

כעת נוכיח כי $f = f_u$, כלומר לכל $v \in V$ מתקיים $f(v) = \langle v, u \rangle$. כדי להוכיח זאת, מהפירוק $V = W \oplus W^\perp$, די להוכיח, מהלינאריות של f ושל f_u , שהן מזדהות על W ועל $W^\perp$.

אכן, מבחירת u מתוך $W^\perp$, לכל $w \in W$ מתקיים $f(w) = f_u(w) = 0$. כדי להוכיח כי $f = f_u$ גם על $W^\perp$, מספיק לבדוק זאת על הווקטור $u_0 \in W^\perp$ שפורש את $W^\perp$ (שכן

המימד של $W^\perp$ הוא 1 - לכל ווקטור אחר $v \in W^\perp$ מתקיים $v = t \cdot u_0$ עבור סקלר $t \in \mathbb{R}$ כלשהו, ואז

$$\begin{aligned} f(v) &= f(t \cdot u_0) = t \cdot f(u_0) \\ f_u(v) &= f_u(t \cdot u_0) = t \cdot f_u(u_0) \end{aligned}$$

ולכן, אם $f(u_0) = f_u(u_0)$, נובע שמתקיים $f(v) = f_u(v)$ אם כך, נחשב

$$f_u(u_0) = \langle u_0, u \rangle = \left\langle u_0, \frac{\overline{f(u_0)}}{\|u_0\|^2} \cdot u_0 \right\rangle = \frac{f(u_0)}{\|u_0\|^2} \cdot \langle u_0, u_0 \rangle = \frac{f(u_0)}{\|u_0\|^2} \cdot \|u_0\|^2 = f(u_0)$$

לפיכך, קיבלנו כי $f_u = f$ גם על W וגם על $W^\perp$, ולכן, כפי שהסברנו קודם, מתקיים $f_u = f$ על כל V . זה מוכיח את טענת הקיום במשפט. עבור היחידות: נניח כי

$$f = f_{u_1} = f_{u_2}$$

כלומר לכל $v \in V$ מתקיים

$$f(v) = \langle v, u_1 \rangle = \langle v, u_2 \rangle \Rightarrow \langle v, u_1 - u_2 \rangle = 0$$

בפרט, מתקיים

$$\begin{aligned} \langle u_1 - u_2, u_1 - u_2 \rangle &= \|u_1 - u_2\|^2 = 0 \\ \|u_1 - u_2\| &= 0 \end{aligned}$$

ולכן מהחיוביות נובע כי

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &= 0 \\ u_1 &= u_2 \end{aligned}$$

■

והוכחנו את היחידות.

1 טרנספורמציות לינאריות במרחבי מכפלה פנימית

משפט 1.1 תהי $T : V \rightarrow V$ טרנספורמציה לינארית כאשר V מרחב מכפלה פנימית סוף מימדי מעל $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. אזי קיימת טרנספורמציה לינארית יחידה T^* , שנקראת הטרנספורמציה הצמודה של T , כך שלכל $u, v \in V$ מתקיים

$$\langle Tv, u \rangle = \langle v, T^*u \rangle$$

הוכחה: יהי V מרחב מכפלה פנימית, ותהי $T : V \rightarrow V$ טרנספורמציה לינארית עליו. נקבע את T ונקבע את הווקטור u , ונביט בפונקציונאל הלינארי

$$f(v) = \langle Tv, u \rangle$$

מייד לבדוק מההגדרות שזהו אכן פונקציונאל לינארי. ממשפט ההצגה של ריס קיים ווקטור u^* יחיד כך שמתקיים $f(v) = \langle v, u^* \rangle$. באופן זה התאמנו, בהינתן T קבועה, לכל ווקטור $u \in V$ ווקטור חדש $u^* \in V$ כך שמתקיים

$$\langle Tv, u \rangle = \langle v, u^* \rangle$$

אם נוכיח כי $u \rightarrow u^*$ היא טרנספורמציה לינארית, אזי נמצא את T^* שאנחנו מחפשים. נבדוק לינאריות. נרצה שיתקיים

$$u_1 + u_2 \rightarrow u_1^* + u_2^*$$

וזה שקול לכך שמתקיים

$$\langle Tv, u_1 \rangle = \langle v, u_1^* \rangle, \langle Tv, u_2 \rangle = \langle v, u_2^* \rangle \Rightarrow \langle Tv, u_1 + u_2 \rangle = \langle v, u_1^* + u_2^* \rangle$$

משום שממשפט ההצגה של ריס ידוע לנו כי הווקטור u^* הוא יחיד לכל ווקטור u , ולכן ינבע $(u_1 + u_2)^* = u_1^* + u_2^*$. ואכן

$$\langle Tv, u_1 + u_2 \rangle = \langle Tv, u_1 \rangle + \langle Tv, u_2 \rangle = \langle v, u_1^* \rangle + \langle v, u_2^* \rangle = \langle v, u_1^* + u_2^* \rangle$$

כעת נרצה שיתקיים בנוסף

$$\langle Tv, tu \rangle = \langle v, tu^* \rangle$$

ואכן

$$\langle Tv, tu \rangle = \bar{t} \langle Tv, u \rangle = \bar{t} \langle v, u^* \rangle = \langle v, tu^* \rangle$$

ולכן ההעתקה $u \rightarrow u^*$, שנשמנה T^* , היא לינארית ומקיימת את התנאים במשפט. ■

דוגמה $T(v) = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{F}$. כעת

$$\langle Tv, u \rangle = \langle \lambda v, u \rangle = \lambda \langle v, u \rangle = \langle v, \bar{\lambda} u \rangle$$

ולכן במקרה זה, $T^*u = \bar{\lambda}u$ היא הטרנספורמציה הצמודה של T .

דוגמה במצב לא סוף-מימדי: יהי V מרחב כל הפונקציות הממשיות $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, שהן גזירות אינסוף פעמים ובעלות מחזור 1, כלומר $f(x) = f(x+1)$ לכל $x \in \mathbb{R}$. נהפוך את V למרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ על ידי

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) \, dx$$

תהי $T(f) = f'$ נוכיח שבמקרה זה, $T^*(f) = -f'$. יש לבדוק שלכל $f, g \in V$ מתקיים

$$\langle T(f), g \rangle = \langle f', g \rangle = \int_0^1 f' \cdot g = \int_0^1 f \cdot (-g') = \langle f, -g' \rangle = \langle f, T^*(g) \rangle$$

לכן יש למעשה להוכיח

$$0 = \int_0^1 f' \cdot g + g' \cdot f = \int_0^1 (f \cdot g)' = f(1)g(1) - f(0)g(0)$$

וכמובן, $f(1) = f(0), g(1) = g(0)$.

דוגמה יהי $V = \mathbb{R}^n$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$, ונביט בטרנספורמציה $T_A(v) = Av$. נחשב את $(T_A)^*$, כלומר את הטרנספורמציה הליניארית S המקיימת $\langle T_A v, u \rangle = \langle v, S u \rangle$.

לשם כך נשים לב שאת המכפלה הפנימית הסטנדרטית ניתן להציג על ידי כפל מטריצוני של הווקטורים באופן הבא:

$$\langle v, u \rangle = v^T \bar{u}$$

$$\text{ואכן, אם } v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ ובעת}$$

$$v^T \bar{u} = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i = \langle v, u \rangle$$

כעת, נוכל לחשב:

$$\langle T_A v \rangle = \langle Av, u \rangle = (Av)^T \bar{u} = (v^T A^T) \bar{u} = v^T (A^T \bar{u}) = v^T \overline{(A^T u)} = \langle v, \overline{A^T u} \rangle$$

$$\text{נסמן } \bar{A^T} = A^*, \text{ ואז מתקיים } \langle T_A v, u \rangle = \langle v, T_{A^*} u \rangle \text{ כלומר } (T_A)^* = T_{A^*}.$$

$$\text{למשל, עבור } A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2i+1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ מתקיים } A^* = \begin{pmatrix} -i & -2i+1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

משפט 1.2 תכונות בסיסיות של T^* :

$$1. (T^*)^* = T$$

$$2. (\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$$

$$3. (T + S)^* = T^* + S^*$$

$$4. (TS)^* = S^* T^*$$

הוכחה: נוכיח את סעיף 1, ושאר ההוכחות יותירו לתרגיל.
סעיף 1:

$$\begin{aligned} \langle Tv, u \rangle &= \langle v, T^*u \rangle \\ \overline{\langle Tv, u \rangle} &= \overline{\langle v, T^*u \rangle} \\ \langle u, Tv \rangle &= \langle T^*u, v \rangle \end{aligned}$$

■

$$(T^*)^* = T \text{ ולכן}$$

נשים לב שבדוגמא של מרחב הפונקציות הרציפות המחזוריות מתקיים, עבור $S(f) = f''$, $S^* = S$ מדוע?

ראינו כבר כי עבור $T(f) = f'$ מתקיים $T^* = -f'$. לכן מתקיים $S^* = (T^2)^* = T^* \circ T^* = (-T) \circ (-T) = T^2 = S$.

זוהי דוגמה חשובה לטרנספורמציה לינארית צמודה לעצמה.