

אלגברה לינארית 2א

© ארזים

3 במאי 2016

1 מרחבי מכפלה פנימית

בפרק הזה (כלומר עד סוף הקורס) השדה $\mathbb{F}$ מעליו עובדים הוא תמיד $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$. עד כמה שאפשר נשתדל לעבוד סימולטנית מעל שניהם. לפעמים נצטרך להבדיל ביניהם קצת (ההבדל לא יהיה מהותי בדרך כלל). נגדיר מרחב מכפלה פנימית, ונתחיל במקרה של $\mathbb{R}$.

הגדרה 1.1 יהי $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$ הינו מרחב ווקטורי V מעל $\mathbb{F}$, ועליו תבנית בי-לינארית סימטרית שהיא מוגדרת חיובית (או חיוביות לחלוטין), שמסומנת $B(v, u) = \langle v, u \rangle$. זאת אומרת, לכל זוג ווקטורים $u, v \in V$ קיים סקלר $\langle v, u \rangle \in \mathbb{F}$, כך שמתקיים שהיא סימטרית, כלומר $\langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle$; היא לינארית בכל אחד מהרכיבים לחוד; וחיובית, כלומר לכל $v \neq 0$ מתקיים $\langle v, v \rangle > 0$.

דוגמאות

1. על $\mathbb{R}^n$ מוגדרת המכפלה הפנימית הסטנדרטית:

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$
$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

2. $V = M_n(\mathbb{R})$, נגדיר

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A \cdot B^t)$$

הלינאריות ברורה, והסימטריה קלה (עקבה של שחלוף של מטריצה שווה לעקבה של המטריצה המקורית), וחיוביות נובעת מחישוב ישיר:

$$\langle A, A \rangle = \text{tr}(A \cdot A^t) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2$$

3. $V = C[0, 1]$ - מרחב הפונקציות הרציפות על $[0, 1]$, נגדיר

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) \, dx$$

אי אפשר לשמור על תכונת החיוביות כשעובדים מעל $\mathbb{C}$ אם מתעקשים על לינאריות מלאה: אם $\langle v, v \rangle > 0$ אזי $\langle v, v \rangle = -\langle v, v \rangle < 0$ קריטי לנו בכל זאת לשמור על תכונת החיוביות, ולכן נקריב משהו בתכונות הלינאריות והסימטריה.

הגדרה 1.2 יהי $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$ הוא מרחב ווקטורי V , כאשר לכל $v, u \in V$ מוגדר סקלר $\langle v, u \rangle \in \mathbb{F}$ כך שמתקיים:

1.

$$\begin{aligned} \forall v, u_1, u_2 \in V \quad \langle v, u_1 + u_2 \rangle &= \langle v, u_1 \rangle + \langle v, u_2 \rangle \\ \forall v_1, v_2, u \in V \quad \langle v_1 + v_2, u \rangle &= \langle v_1, u \rangle + \langle v_2, u \rangle \\ \forall v, u \in V, \forall t \in \mathbb{F} \quad \langle tv, u \rangle &= t \langle v, u \rangle \\ \forall v, u \in V, \forall t \in \mathbb{F} \quad \langle v, tu \rangle &= \bar{t} \langle v, u \rangle \end{aligned}$$

$$2. \quad \forall v, u \in V \quad \langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle} \quad (\text{סימטריה מרוכבת})$$

3. חיוביות באותו מובן כמו קודם, כלומר $\forall v \in V \quad \langle v, v \rangle > 0$, כלומר זהו מספר ממשי וחיובי (הממשיות נובעת מתכונה 2).

הגדרה אלטרנטיבית ושקולה:

1. לינארית במובן הרגיל ברכיב השמאלי.

$$2. \quad \langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}.$$

3. $\langle v, v \rangle > 0$ אם $v \neq 0$.

הגדרה זו תופסת גם את ההגדרה עבור $\mathbb{R}$, שכן התכונה השנייה עבור הממשיים משמעה סימטריה רגילה.

דוגמה המכפלה הפנימית הסטנדרטית על $\mathbb{C}^n$, בסימונים שהשתמנו בהם בדוגמה על $\mathbb{R}^n$, תהיה

$$\begin{aligned} \langle v, u \rangle &= \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i \\ \langle u, v \rangle &= \sum_{i=1}^n b_i \bar{a}_i = \overline{\sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i} = \overline{\langle v, u \rangle} \\ \langle v, v \rangle &= \sum_{i=1}^n a_i \bar{a}_i = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 > 0 \end{aligned}$$

הגדרה 1.3 יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. אזי לכל $v \in V$ מגדירים את הנורמה של v , $\|v\|$, על ידי $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ (השורש הממשי האי-שלילי).

מהחוביות נובע כי $v = 0 \iff \|v\| = 0$, ואחרת $\|v\| > 0$. הנורמה היא למעשה "אורך של ווקטור" במרחב מכפלה פנימית.

למשל, במכפלה הפנימית הסטדנרטית שראינו על $\mathbb{R}^n$, הנורמה היא האורך האוקלידי הרגיל של v . למשל, עבור $\mathbb{R}^3$,

$$\|v\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$